

Grafentheorie voor bouwkundigen

Grafentheorie voor bouwkundigen

A.J. van Zanten

Delft University Press

CIP-gegevens Koninklijke Bibliotheek, Den Haag

Zanten, A.J. van

Grafentheorie voor bouwkundigen / A.J. van Zanten. – Delft

: Delft University Press. — III.

In opdracht van: Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft. – Met lit. opg., reg.

ISBN 90-407-1173-9

Trefw.: grafentheorie / bouwkunde.

© VSSD

Eerste druk 1995, verbeterd 2001

Uitgegeven door:

Delft University Press

Postbus 98, 2600 MG Delft

tel. +31 15 27 85678, telefax +31 15 27 85706, e-mail info@library.tudelft.nl

internet: <http://www.library.tudelft.nl/dup>

In opdracht van:

Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft

Poortlandplein 6, 2628 BM Delft

tel. +31 15 27 82124, telefax +31 15 27 87585, e-mail: hlf@vssd.nl

internet: <http://www.vssd.nl/hlf>

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photo-copying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

ISBN 90-407-1173-9



Voorwoord

Het eerste deel van dit boek is een inleiding in de grafentheorie en haar toepassingen. Met name worden problemen uit de sfeer der bouwkunde in termen van grafen geformuleerd en vervolgens opgelost.

Veel van de behandelde stof is in uitgebreidere vorm terug te vinden in:

- [1] Baglivo, J.A. and Graver, J.E.,
Incidence and Symmetry in Design and Architecture, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

In het bijzonder is de stof uit Hoofdstuk 2 over organisatiegrafen en uit Hoofdstuk 4 over het bestaan van half-regelmatige veelvlakken behandeld, op een wijze zoals dat in [1] is gebeurd.

Voor zelfstudie en voor verdere oriëntatie in bouwkundig getinte toepassingen van wiskunde in het algemeen en van grafentheorie in het bijzonder wordt dit boek zeer aanbevolen.

Een tweede boek dat men naast dit boek zou kunnen raadplegen is:

- [2] Wilson, R.J., *Introduction to Graph Theory*, Wiley and Sons, New York, 1986.

Dit is een inleiding in de abstracte grafentheorie en is minder toepassingsgericht dan [1]. Het is zeer geschikt om iets meer te leren omtrent de zuiver wiskundige aspecten van de in dit boek aangehaalde theorie.

Het onderwerp van het tweede deel is 'Netwerktheorie' en wel in het bijzonder het Theorema van Ford en Fulkerson over de maximale stroom in een netwerk. De presentatie van dit theorema en ook de behandeling van gevolgen en toepassingen zijn zoals in vrijwel elk leerboek dat aan deze materie een aantal hoofdstukken wijdt. Men zie hiervoor bijvoorbeeld [2] en voorts

- [3] Berge, C.
Graphs and Hypergraphs, North Holland, Amsterdam, 1973.
- [4] Grimaldi, R.P.
Discrete and Combinatorial Mathematics, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1989.
- [5] Liu, C.L.
Introduction to Combinatorial Mathematics, Mc Graw Hill, New York.

Een aantal voorbeelden en vraagstukken in dit deel heeft zijn oorsprong in [3] tot [5].

Opgemerkt zij nog dat de hier besproken algoritmen voor het berekenen van maxi-

male stromen in netwerken de grondslag vormen voor computerprogramma's voor netwerken, zoals opgenomen in het software-pakket STELLA.

A.J. van Zanten

Delft, augustus 1995

In de nieuwe druk is een aantal fouten uit de eerste oplage gecorrigeerd. Verder is een extra oefentamen opgenomen.

A.J. van Zanten

Delft, februari 2001



Inhoud

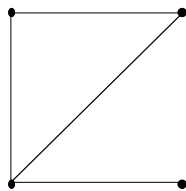
VOORWOORD	5
1. BEGRIPPEN EN DEFINITIES UIT DE GRAFENTHEORIE	10
1.1. Inleiding	10
1.2. Definities en elementaire begrippen	14
1.3. Paden en afstanden	16
1.4. Organisatiegrafen	19
2. PLANAIRITEIT EN DUALITEIT	24
2.1. Planaire grafen	24
2.2. Duale grafen	29
2.3. Plattegrond en organisatiegraaf	32
2.4. Samenhang van grafen	37
3. OPTIMALE PADEN IN GRAFEN	42
3.1. Kortste-pad-algoritme	42
3.2. Optimale routes	47
3.3. Kritieke-pad-methode	48
4. REGELMATIGE EN HALF-REGELMATIGE VEELVLAKKEN	54
4.1. Formule van Euler	54
4.2. Regelmatige veelvlakken	56
4.3. Reguliere kaarten	58
4.4. Vlakkleuringen	60
4.5. Half-regelmatige veelvlakken	63
5. VRAAGSTUKKEN DEEL 1	73
Antwoorden	92
Oefententamen	93
Antwoorden oefententamen	94
6. NETWERKEN EN STROMEN	96
6.1. Inleiding en definities	96
6.2. Het begrip snede	100
6.3. Het max-flow min-cut theorema	104

7.	VARIANTEN EN UITBREIDINGEN VAN HET MAX-FLOW MIN-CUT THEOREMA	111
7.1.	Enkele toepassingen	111
7.2.	Een afvalwaterprobleem	116
7.3.	Het uitgebreide max-flow min-cut theorema	118
8.	MATCHINGTHEORIE	126
8.1.	Probleemstelling	126
8.2.	Volledige matching	128
8.3.	Maximale matching	133
9.	VRAAGSTUKKEN DEEL 2	141
	APPENDIX A: REGELMATIGE MOZAÏEKEN	149
	APPENDIX B: HALF-REGELMATIGE MOZAÏEKEN	150
	TREFWOORDENLIJST	153

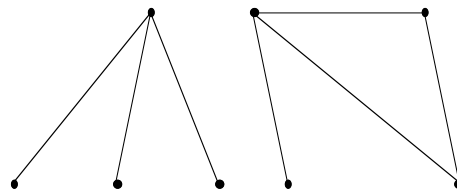
1 Begrippen en definities uit de grafentheorie

1.1. Inleiding

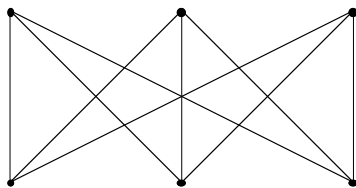
Een *graaf* bestaat in het algemeen uit een aantal punten en een aantal verbindingslijnen tussen (sommige van) die punten. De punten worden *knopen* genoemd en de verbindingslijnen *takken*. De figuren 1.1, 1.2, 1.3 en 1.4 geven alle een voorbeeld van een graaf.



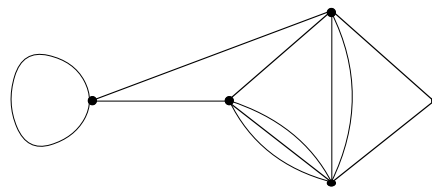
Figuur 1.1.



Figuur 1.2.



Figuur 1.3.



Figuur 1.4.

In bovenstaande figuren zijn de knopen aangegeven door dikke punten en de takken door rechte of kromme lijnen. Let erop dat in figuur 1.3 niet alle snijpunten van takken knopen zijn. Voorts laat figuur 1.2 een graaf zien die uit twee ‘losse’ gedeelten bestaat. In figuur 1.4 zien we dat twee knopen door meer dan één tak verbonden kunnen worden en ook dat een knoop met zichzelf verbonden kan zijn door een tak.

De *grafentheorie* is behalve een belangrijk zelfstandig wiskunde-onderwerp vooral ook een theorie met zeer veel toepassingen buiten de wiskunde. Vele problemen uit de natuurkunde, de scheikunde, de informatica, de sociale wetenschappen, de architectuur, etc. laten zich formuleren als grafentheoretische problemen.

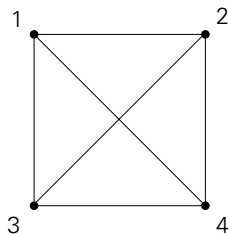
Zo laten figuur 1.5 en figuur 1.6 een deel van een elektrisch netwerk zien, respectievelijk een deel van een wegenkaart.

2 Planairiteit en dualiteit

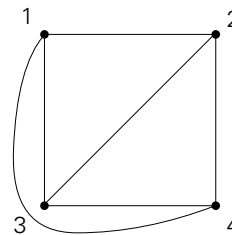
2.1. Planaire grafen

In het vorige hoofdstuk definieerden we een planaire graaf als een graaf die in het platte vlak getekend kan worden, zodanig dat takken elkaar slechts snijden in knopen. Wat preciezer gezegd: een graaf is planair als hij *isomorf* is met een graaf die aan bovenstaande omschrijving voldoet.

We geven hiervan nog één eenvoudig voorbeeld. De graaf K_4 in figuur 2.1 voldoet niet aan de eis dat takken elkaar slechts in knopen snijden.



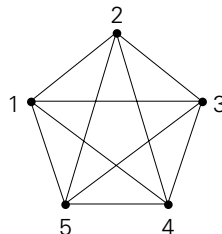
Figuur 2.1.



Figuur 2.2.

Als de graaf een wegennet voorstelt en men zou willen dat de wegen $\{1,4\}$ en $\{2,3\}$ elkaar niet kruisen, dan zou men ter plekke een viaduct moeten aanleggen. Met andere woorden men zou een *niet-planaire inbedding* hebben van de graaf, omdat men op twee niveaus wegen zou moeten aanleggen. Echter is de graaf toch planair, omdat hij isomorf is met de versie in figuur 2.2. Alle wegen bevinden zich daar in één vlak. De graaf $K_{3,3}$ uit figuur 1.3 is een voorbeeld van een niet-planaire graaf.

Vanzelfsprekend zou men graag een criterium hebben, waarmee men uit kan maken of een graaf planair is of niet. In de formulering van een dergelijk criterium zal $K_{3,3}$ een grote rol spelen, evenals de volledige graaf K_5 , waarvan een niet-planaire versie in figuur 2.3 getekend is.



Figuur 2.3.