

# Numerieke Wiskunde voor technici



# Numerieke Wiskunde voor technici

J. van Kan

© VSSD

Eerste druk 1988

Derde druk 1996, 2000, 2001, 2009

Uitgegeven door de VSSD

Leeghwaterstraat 42, 2628 CA Delft

tel. +31 15 2782124, e-mail: [dap@vssd.nl](mailto:dap@vssd.nl)

**[www.delftacademicpress.nl/a006.php](http://www.delftacademicpress.nl/a006.php)**

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

*All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.*

ISBN 978-90-407-1151-0

NUR 918

Trefw.: numerieke wiskunde

# Voorwoord

Het gebruik van numerieke methoden door technici beperkt zich in de praktijk vaak door het aanroepen van subroutines uit een bestaand programmapakket. Daar dit vaak ‘black-box’ pakketten zijn is het noodzakelijk dat men uit de resultaten zelf kan zien of de vereiste nauwkeurigheid gehaald is en of het probleem gevoelig is voor verstoringen. Om deze reden wordt in dit boek naast de uiteenzetting van de numerieke methoden ook ruimschoots aandacht besteed aan zaken als foutenanalyse, stabiliteit en conditie.

De methoden worden gepresenteerd in een technische context in de verwachting dat dit motivatieverhogend zal werken.

Dit boek bevat (in iets gewijzigde vorm) de stof zoals die in het college Numerieke Analyse C1 (a105) aan de TU Delft wordt onderwezen. Het bevat als onderwerpen gewone differentiaalvergelijkingen en numerieke lineaire algebra. Elementaire onderwerpen als interpolatie, numerieke integratie en nulpuntsbepaling worden bekend verondersteld. In die zin bouwt het voort op Analyse door J.H.J. Almering e.a., ook bij deze uitgever verschenen.

De schrijver houdt zich aanbevolen voor opmerkingen.

Augustus 1988

J. van Kan

## Opmerking bij de derde druk

Naast enkele kleine verbeteringen zijn in deze nieuwe druk twee bijlagen toegevoegd.

Januari 1996

J. van Kan



# Inhoud

VOORWOORD	5
<b>DEEL I</b>	
<b>GEWONE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN</b>	
1 BEGINWAARDENPROBLEMEN	13
1.1. Inleiding	13
1.1.1. Type probleemstelling	13
1.1.2. Begin(voor)waardenproblemen	14
1.1.3. Randwaardenproblemen	14
1.2. Numerieke integratie	15
1.2.1. Analytische en numerieke oplossing	15
1.2.2. Principe van een numerieke oplosmethode	15
1.2.3. Het begrip orde ( $O$ )	18
1.2.4. Lokale afbreekfout	19
1.2.5. Hogere-orde methoden	22
1.2.6. De methode van Runge-Kutta	23
1.3. Stabiliteit	25
1.3.1. Versterkingsfactor	26
1.3.2. Conclusies	30
1.3.3. Het belang van stabiliteit van numerieke processen	30
1.3.4. Toepasbaarheid op $y' = f(x,y)$	32
1.4. Globale fout	32
1.4.1. Schatting van de fout in de praktijk	34
1.5. Stelsels eerste-orde beginwaardenproblemen	35
1.5.1. Algemene gedaante	35
1.5.2. Numerieke methoden voor stelsels	36
1.5.3. Hogere-orde beginwaardenproblemen	38
1.6. Stabiliteit van numerieke methoden voor stelsels vergelijkingen	40
1.6.1. Versterkingsmatrix	42
1.6.2. Het algemene geval	45
1.6.3. Stabiliteit en nauwkeurigheid	46
1.6.4. Impliciete methoden	47

## DEEL II

### NUMERIEKE LINEAIRE ALGEBRA

2	HET OPLOSSEN VAN STELSELS LINEAIRE VERGELIJKINGEN	53
2.1.	Inleiding	53
2.2.	Probleemstelling	53
2.2.1.	Geheugenruimte en rekentijd	54
2.2.2.	Hoe het niet moet (I)	54
2.2.3.	Hoe het niet moet (II)	55
2.3.	Gauss-eliminatie	55
2.3.1.	Floating-point aritmetiek	60
2.3.2.	Pivotstrategieën	61
2.4.	LU decompositie	62
2.4.1.	Verband tussen $L$ , $U$ en $A$	64
2.4.2.	De inverse in $LU$ -vorm	65
2.4.3.	Varianten van de $LU$ decompositie	68
2.4.4.	Varianten voor symmetrische matrices	68
2.4.5.	Choleski decompositie	69
2.5.	Conditie	73
2.5.1.	Relatie tussen conditie en grootte van de determinant?	74
2.5.2.	Relatie tussen conditie en eigenwaarden	74
2.5.3.	Eigenschappen van de norm	75
2.5.4.	Het verstoorde systeem	75
2.5.5.	Numerieke singulariteit	77
2.5.6.	Praktische bepaling van de conditie	77
	<b>Toepassingen</b>	
2.6.	Lineaire randwaarden problemen	77
2.6.1.	De kabelvergelijking	77
2.6.2.	Differentiemethoden	78
2.6.3.	Globale fout	80
2.6.4.	Conditie	81
2.6.5.	Andere randvoorwaarden	82
2.6.6.	Conditie van het probleem met betrekking tot de randvoorwaarden	84
2.6.7.	De buigende balk	85
2.7.	Kleinste kwadraten methode	87
2.7.1.	$n$ vergelijkingen met $m$ onbekenden ( $n > m$ )	89
2.7.2.	$m$ -de graadspolynoom door $n + 1$ steunpunten	90
2.7.3.	Conditie	92



3	EIGENWAARDENPROBLEMEN	95
3.1.	Inleiding	95
3.2.	Herhaling van enige begrippen	95
3.2.1.	Een eigenwaardenprobleem uit de techniek	96
3.3.	Numerieke methoden	97
3.3.1.	De powermethode	97
3.3.2.	Praktische uitvoering van de powermethode	99
3.3.3.	Convergentiesnelheid	100
3.3.4.	Grootste eigenwaarden van gelijke modulus	103
3.4.	Hotelling-deflatie	103
3.4.1.	Praktische beperking van de Hotelling deflatie	105
3.4.2.	Het niet-symmetrische geval	105
3.5.	Bandmatrices. Vectordeflatie	107
3.6.	Inverse iteratie	108
3.6.1.	Bandmatrices	109
3.7.	Het gegeneraliseerde eigenwaardenprobleem	109
3.7.1.	Symmetrische $A$ en $B$	110
3.7.2.	$A$ en $B$ grote bandmatrices	111
3.8.	Toepassingen	111
3.8.1.	De knikkende staaf	111
3.8.2.	Numerieke behandeling	112
	APPENDIX A: INTERPOLATIE EN INTEGRATIE	115
A.1.	Het Taylor polynoom	115
A.2.	Integratie	119
	APPENDIX B: STELLING VAN GERSCHGORIN	124
	LITERATUUR	126
	TREFWOORDEN	127





# GEWONE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN



# 1 | Beginwaardenproblemen

## 1.1. Inleiding

Vele problemen in de techniek kunnen worden geformuleerd in termen van differentiaalvergelijkingen. Afhankelijk van de aard van het technische probleem treden op (stelsels) gewone of partiële differentiaalvergelijkingen met nevencondities in de vorm van begin- en/of randwaarden.

Mathematisch gezien is de betekenis van deze nevencondities, dat zij ervoor zorgen dat het probleem in kwestie precies één oplossing heeft.

### Voorbeeld 1.1

De differentiaalvergelijking

$$y' = \alpha y$$

heeft als algemene oplossing  $y = C \cdot e^{\alpha x}$ .

Om de constante  $C$  te kunnen bepalen is nodig, dat de waarde van  $y$  voor een of andere  $x$  gespecificeerd wordt.  $\triangle$

De fysische betekenis van de nevencondities is vaak dat zij een essentieel gegeven van het probleem bevatten. Interpreteren we de differentiaalvergelijking in voorbeeld 1.1 als de groei van 100  $\alpha\%$  per jaar dan is het duidelijk dat we voor een volledige beschrijving de grootte van het beginkapitaal moeten kennen. In dit probleem treedt de nevenvoorwaarde op als beginvoorwaarde.

### 1.1.1. Type probleemstelling

In dit boek worden slechts de gewone differentiaalvergelijkingen beschouwd, zoals deze optreden in technische probleemstellingen. Bij een  $n$ -de orde gewone differentiaalvergelijking treden in de algemene oplossing  $n$  integratieconstanten op. Er zijn dus  $n$  (onafhankelijke) nevencondities nodig om de oplossing eenduidig vast te leggen. Hoewel in principe een probleemstelling als

$$y''' - y'' + y = 0, \quad \text{met als nevenvoorwaarden}$$

$$y(0) = 1, \quad y'(1) = 10, \quad y(2) = 0, \quad y'(3) = 2$$

mogelijk is, treedt zoiets in de techniek nimmer op.

De probleemstellingen zoals zij in de techniek optreden laten zich opsplitsen in twee hoofdcategorieën, de begin(voor)waarden- en de rand(voor)waardenproblemen.

Zowel de fysische context waarin zij optreden als de numerieke behandeling zijn totaal verschillend.

### **1.1.2. Begin(voor)waardenproblemen**

Deze zijn veelal de mathematische beschrijving van een proces dat verloopt in de tijd. De oplossing van de differentiaalvergelijking wordt gezocht op het interval  $[t_0, \infty)$ . Alle nevencondities worden gegeven op tijdstip  $t_0$  en worden begin(voor)waarden genoemd.

#### **Voorbeeld 1.2**

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 \sin y = 0;$$

$$y(0) = \frac{\pi}{6}; \quad y'(0) = 0.$$

Dit is de vergelijking van de mathematische slinger.  $y(0)$  is de beginuitwijking,  $y'(0)$  is de beginsnelheid. △

### **1.1.3. Randwaardenproblemen**

Deze zijn veelal de mathematische beschrijving van een statisch evenwicht. De oplossing van de differentiaalvergelijking wordt gezocht op een begrensd interval  $[x_0, x_1]$ . De nevencondities worden gegeven in beide randpunten van het interval en worden randwaarden genoemd.

#### **Voorbeeld 1.3**

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{f(x)}{EI}$$

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(l) = y'(l) = 0.$$

De vergelijking van een buigende balk met buigstijfheid  $EI$  onder een belasting  $f(x)$ . De randwaarden betekenen dat de balk aan de uiteinden ingeklemd is.

Beginwaardenproblemen worden in dit hoofdstuk behandeld, enkele typen randwaardenproblemen komen in hoofdstuk 2 aan de orde.

## 1.2. Numerieke integratie

### 1.2.1. Analytische en numerieke oplossing

Wanneer men inzicht wil verkrijgen in het kwalitatieve gedrag van de oplossing (het gedrag bij het beginpunt, het gedrag voor  $t \rightarrow \infty$ , de afhankelijkheid van bepaalde modelparameters) is men aangewezen op analytische hulpmiddelen. Ook wanneer de differentiaalvergelijking niet analytisch oplosbaar is, kan men vaak een inzicht krijgen in het kwalitatieve gedrag door bepaalde vereenvoudigingen in te voeren (linearisering, zie het voorbeeld van de mathematische slinger). Een numerieke oplossing geeft kwantitatieve informatie. Men kan deze slechts bepalen indien voldoende begin- of randwaarden gegeven zijn. Het is niet zo, dat een analytische oplossing de voorkeur zou hebben boven een numerieke. Ook wanneer van een differentiaalvergelijking een analytische oplossing bekend zou zijn, kan het voordelig zijn om voor het verkrijgen van kwantitatieve informatie de differentiaalvergelijking numeriek te integreren.

### 1.2.2. Principe van een numerieke oplosmethode

Zij gegeven het beginwaarden probleem  $y' = f(x,y)$  met beginvoorwaarde  $y(x_0) = y_0$ . We nemen een aantal steunpunten  $x_i$  gegeven door

$$x_i = x_0 + ih, \quad h \text{ vast en } h > 0; \quad i = 1, \dots, N.$$

We trachten de oplossing van de differentiaalvergelijking in de punten  $x_i$  te bepalen. We noteren  $y_i = y(x_i)$ . Vooreerst merken we op dat, indien  $f$  een functie van  $x$  alleen is dus  $f(x,y) = g(x)$ , geldt:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \int_{x_0}^{x_1} g(x) \, dx \\ y_2 &= y_1 + \int_{x_1}^{x_2} g(x) \, dx \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + \int_{x_{n-1}}^{x_n} g(x) \, dx \\ &\vdots \end{aligned}$$

We kunnen dan door een geschikte kwadratuurformule te gebruiken voor de integralen  $\int_{x_{n-1}}^{x_n} g(x) \, dx$  een tabel vinden die de oplossing  $y(x)$  benadert in de steunpunten  $x_i$ .

In het algemene geval krijgen we:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x,y) \, dx & (1.1) \\
 y_2 &= y_1 + \int_{x_1}^{x_2} f(x,y) \, dx \\
 &\vdots \\
 y_n &= y_{n-1} + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y) \, dx \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

We kunnen de integraal  $\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y) \, dx$  benaderen met  $hf(x_{n-1}, y_{n-1})$ . Dit leidt tot de formules van Euler

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}). \quad (1.2)$$

De complicatie die optreedt bij toepassing van nauwkeuriger kwadratuurformules is, dat waarden van  $y$  optreden die nog bepaald moeten worden. Zo ontstaat bij toepassing van de trapeziumregel:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,y) \, dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)], \quad (1.3)$$

en bij de regel van Simpson (zie Appendix A2):

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,y) \, dx \approx \frac{h}{6} [f(x_0, y_0) + 4f(x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}}) + f(x_1, y_1)]. \quad (1.4)$$

In (1.3) is  $y_1$  nog onbekend, in (1.4) is zowel  $y_{\frac{1}{2}}$  als  $y_1$  nog onbekend. We hebben al gezien hoe in (1.3)  $y_1$  geschat kan worden hetgeen leidt tot de formules van Heun:

$$y_1^* = y_0 + hf(x_0, y_0) \quad (1.5)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)].$$

Merk op dat  $y_1^*$  een functie is van  $y_0$ ,  $h$  en  $x_0$ .

Later zullen we zien hoe in formule (1.4)  $y_{\frac{1}{2}}$  en  $y_1$  geschat kunnen worden in termen van  $h$  en  $y_0$ . Symbolisch kan een numerieke oplosmethode van dit type worden weergegeven door de formule

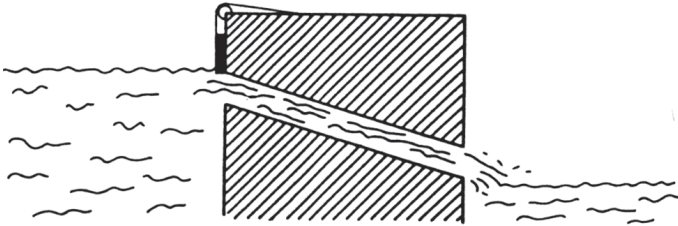


$$y_{i+1} = y_i + h\Psi(h, y_i, x_i). \quad (1.6)$$

De functie  $\Psi$  hangt af van de te gebruiken kwadratuurformule en hoe de daarin optredende nog onbekende  $y$ 's worden geschat.

#### Voorbeeld 1.4

Aan de hand van dit voorbeeld zal nagegaan worden hoe de hiervoor geschetste zaken aan de orde komen. Beschouwd wordt daartoe de afvoer uit een zeer groot waterreservoir door een leiding (zie figuur 1.1).



Figuur 1.1. Waterreservoir.

Het water is in rust tot bij  $t = 0$  een schuif plotseling wordt geopend. Door de traagheid van het water komt de afvoer geleidelijk op gang. Dit proces wordt beschreven door de differentiaalvergelijking

$$\frac{dQ}{dt} = f(t) - aQ^2, \quad Q(0) = 0. \quad (1.7)$$

Hierin is  $Q$  ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) de afvoer,  $f$  een term waarin de op het water werkende krachten verwerkt zijn (de dimensie is  $\frac{\text{kracht/lengthe}}{\text{dichtheid}}$  ofwel  $\frac{\text{N/m}}{\text{kg/m}^3} = \text{m}^3/\text{s}^2$ ) en  $aQ^2$  een weerstandsterm.

Als er vrije uitstroming aan de rand optreedt kan men  $f(t)$  constant nemen ( $f(t) = f_0$ ). In dit speciale geval is de analytische oplossing bekend namelijk

$$t = \frac{1}{2\sqrt{af_0}} \ln \left( \frac{\sqrt{f_0} + Q\sqrt{a}}{\sqrt{f_0} - Q\sqrt{a}} \right)$$

of

$$Q = \sqrt{\frac{f_0}{a}} \tanh(t\sqrt{af_0}). \quad (1.8)$$

Uit deze uitdrukking kunnen we kwalitatieve aspecten afleiden als:

1. In de buurt van  $t = 0$  gedraagt  $Q$  zich als  $Q = f_0 t$ . Dit is ook direct uit de differentiaalvergelijking (1.7) te zien door  $Q = 0$  te stellen en in de buurt van  $t = 0$   $Q$  te beschouwen als oplossing van  $\frac{dQ}{dt} = f_0$ .

2.  $Q$  stijgt monotoon als functie van  $t$  en gaat voor  $t \rightarrow \infty$  naar  $\sqrt{\frac{f_0}{a}}$ .
3. Het gedrag van  $Q$  voor  $t \rightarrow \infty$  volgt uit eigenschappen van de  $\tanh$ :

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

Voor grote  $x$  geldt, afgezien van termen van  $e^{-4x}$  en kleiner:

$$\frac{1}{1 + e^{-2x}} \approx 1 - e^{-2x},$$

dus  $\tanh x \approx (1 - e^{-2x})^2$

en weer, afgezien van de term  $e^{-4x}$ :

$$\tanh x \approx 1 - 2e^{-2x}.$$

Wil men de oplossing  $Q$  tabelleren voor een of ander doel (bijvoorbeeld om een grafische voorstelling te verkrijgen) dan kan men veel beter gebruik maken van de formules van Heun (1.5) of een ander numeriek integratieproces, dan de tabel te berekenen met behulp van uitdrukking (1.8). Het eerste is een veel minder bewerkelijk rekenproces.

Indien  $f$  geen constante functie is kan er geen analytische oplossing bepaald worden, hoewel uit de differentiaalvergelijking vaak nog wel kwantitatieve zaken te bepalen zijn als het limietgedrag op 0 en  $\infty$ . Aan de numerieke oplossmethoden verandert echter niets. Deze zijn algemeen toepasbaar.  $\triangle$

Dit voorbeeld geeft een aardige indruk van de kracht en de zwakheid van de analytische en de numerieke aanpak. We zijn hier zolang bij stil blijven staan, omdat het van buitengewoon groot belang is dat men zich realiseert bij het toepassen van numerieke methoden of ze de informatie zullen verschaffen die nodig is. Hetzelfde geldt mutatis mutandis voor de analytische methoden.

### 1.2.3. Het begrip orde ( $O$ )

We zagen in voorbeeld 1.4 bij het bespreken van de eigenschappen van de  $\tanh$  de zinsnede “afgezien van termen van  $e^{-4x}$  en kleiner”. Dat wil zeggen we lieten uit de uitdrukking voor de  $\tanh$  een aantal termen weg (oneindig veel om precies te zijn) die “klein” waren op een speciale manier. Teneinde dit nader te preciseren definiëren we het begrip orde.

**Definitie 1.1**

Een grootheid  $R$  is van de orde  $g(x)$ , notatie  $O(g(x))$  (spreek uit grote O van  $g(x)$ ) voor  $x$  naar  $a$ , indien geldt  $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{R}{g(x)} \right| < \infty$ .  $\square$

**Voorbeeld 1.5**

$$e^x = 1 + x + O(x^2) \text{ voor } x \rightarrow 0.$$

De restterm van het Taylorpolynoom is immers (zie Appendix A1)

$$R = \frac{x^2 e^{\vartheta x}}{2!} \quad 0 < \vartheta < 1$$

en  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\vartheta x}}{2!} = \frac{1}{2} < \infty$ .  $\triangle$

**Oefening 1.1**

1. Als  $P = O(x)$  en  $Q = O(x)$  voor  $x \rightarrow 0$  (in feite een slordige notatie van  $P$  en  $Q$  zijn van de orde  $x$ ), dan geldt:

$$P + Q = O(x);$$

$$PQ = O(x^2).$$

2. Voor  $x \rightarrow \infty$  geldt:  $\tanh x = 1 - 2e^{-2x} + O(e^{-4x})$ .

**1.2.4. Lokale afbreekfout**

Wederom wordt beschouwd de differentiaalvergelijking  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ . Met de hiervoor gebruikte notaties beschouwen wij in het punt  $x_{i+1}$  de exacte oplossing (1.1)

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx \quad \text{en}$$

de numerieke oplossing (1.6)

$$u_{i+1} = u_i + h\Psi(h, u_i, x_i).$$

In het algemeen zal  $u_i$  niet gelijk zijn aan  $y_i$  (behalve voor  $i = 0$  natuurlijk) aangezien alle fouten in voorgaande stappen in de integratie worden meegenomen. Het is echter ook van belang om te weten hoe goed formule (1.6) formule (1.1) lokaal benadert. Daartoe gaan we ervan uit dat we de exacte oplossing in het punt  $x_i$  kennen.

**Definitie 1.2**

Zij  $y_i = y(x_i)$  de waarde van de exacte oplossing van de differentiaalvergelijking  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  in het punt  $x_i$ .

Zij  $y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx$  en  $u_{i+1} = y_i + h\Psi(h, y_i, x_i)$ .

Dan is de lokale afbreekfout van de oplosmethode (1.6)

$$E_T(x_{i+1}) = y_{i+1} - u_{i+1}.$$

□

**Opmerking**

Zoals direct is in te zien is dus ook

$$E_T(x_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx - h\Psi(h, y_i, x_i)$$

met andere woorden, de lokale afbreekfout is een maat voor hoe goed de uitdrukking  $h\Psi$  de integraal benadert.

We zullen thans de lokale afbreekfouten bespreken van twee numerieke methoden die reeds bekend zijn: de methode van Euler en de methode van Heun.

**Stelling 1.1**

Zij  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  en laat  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  continu zijn op  $\mathbb{R}^2$ .

Zij gegeven de differentiaalvergelijking  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ . Voor de lokale afbreekfout van de methode van Euler:

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i), u_0 = y_0$$

geldt:  $E_T(x_{i+1}) = O(h^2)$ .

**Bewijs**

Zij  $y_i$  de waarde van de exacte oplossing in het punt  $x_i$ . Daar zowel  $f$  als  $\frac{\partial f}{\partial x}$  en  $\frac{\partial f}{\partial y}$  continu zijn in  $x_i, y_i$ , bestaan zowel  $y'$  als  $y''$  in  $x_i$  en zijn continu.

$$\text{Immers } y'' = \frac{d}{dx} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f \quad (1.9)$$

en de laatste uitdrukking is continu.

Pas nu Taylor ontwikkeling toe in het punt  $x_i$ , dan geldt voor de exacte oplossing in  $x_{i+1}$ :

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2!} y''(x_i + \vartheta h) \quad 0 < \vartheta < 1 \quad (1.10)$$