Analyse van differentiaalvergelijkingen

Analyse van differentiaalvergelijkingen

C.J. van Duijn en M.J. de Neef

VSSD

Eerste druk 1995, tweede druk 2001

Uitgegeven door de VSSD
Leeghwaterstraat 42, 2628 CA Delft, The Netherlands
tel. +31 15 27 82124, telefax +31 15 27 87585, e-mail: hlf@vssd.nl
internet: http://www.vssd.nl/hlf
URL over dit boek: **http://www.vssd.nl/hlf/a007.htm**
De uitgever stelt aan docenten die dit boek in cursusverband gebruiken, desgewenst de collectie illustraties en/of een elektronische versie ter beschikking. Een verzoek kan ingediend worden bij hlf@vssd.nl

Gedrukte editie: ISBN 978-90-407-1265-4
Elektronische versie: ISBN 978-90-6562-109-2
NUR 919
Trefw.: differentiaalvergelijkingen

Voorwoord

Het modelleren van verschijnselen uit de technische wetenschappen en natuurkunde komt dikwijls neer op het combineren van constitutieve- en balansvergelijkingen, en daarmee op een formulering in termen van differentiaalvergelijkingen. Afhankelijk van de aard van het probleem krijgen we te maken met (stelsels) gewone of partiële differentiaalvergelijkingen en met nevencondities in de vorm van begin- en/of randwaarden.

In deze tweede editie richten we ons op tweedejaars studenten Wiskunde en Natuurkunde in de nieuwe bachelor's structuur. De behandelde stof veronderstelt een eerstejaars calculus achtergrond en enige elementaire lineaire algebra. Voor zover abstracte begrippen aan de orde komen, is gekozen voor een vorm waarbij wiskundigen én natuurkundigen zich thuis voelen: hier en daar wordt een bewijs uitgewerkt en naar de wat abstracte literatuur verwezen zonder de begripsopbouw voor de natuurkundigen te veel te verstoren.

Natuurlijk ligt bij een inleidende cursus als deze de nadruk op elementaire en werkbare technieken die de studenten in de latere fase van hun studie nodig hebben. Daarnaast hebben we getracht ook enkele moderne ontwikkelingen te laten doorklinken. Met name het 'klassieke' standpunt dat iedere differentiaalvergelijking exact oplosbaar is in termen van een min of meer expliciete uitdrukking (de zogenaamde analytische oplossing), ondervindt concurrentie van de filosofie van het kwalitatief redeneren. Immers, dikwijls kan nuttige informatie uit een differentiaalvergelijking worden verkregen, bijvoorbeeld over stabiliteit van evenwichten, zonder de oplossing zelf te kennen. Om dit te ondersteunen behandelen we uitvoerig de fasevlakanalyse voor gewone differentiaalvergelijkingen en vergelijkingsprincipes voor partiële differentiaalvergelijkingen. Tevens worden een tweetal voorbeelden van niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen behandeld, waaronder de vergelijking van Burgers.

De stof wordt in drie delen gepresenteerd. In deel I wordt vrij uitvoerig ingegaan op de theorie en toepassingen van beginwaardeproblemen voor gewone differentiaalvergelijkingen. We behandelen de existentie- en eenduidigheidsresultaten, de fasevlak- en stabiliteitsanalyse en we geven de gebruikelijke rekenregels voor eerste- en tweede-orde vergelijkingen.

In deel II behandelen we enkele belangrijke eigenwaardeproblemen uit de quantummechanica, zoals de harmonische oscillator en het waterstofatoom, en we geven een aantal speciale functies als resultaat van machtreekssubstitutie. Tevens worden functies van Green en enkele aspecten van de Sturm-Liouville-theorie behandeld.

Als laatste, in deel III, behandelen we partiële differentiaalvergelijkingen. We bespreken vergelijkingsprincipes en eenduidigheidsresultaten en geven ruim aandacht aan gelijkvormigheidsoplossingen voor diffusievergelijkingen, omdat deze een belangrijke rol spelen binnen het vakgebied der Fysische Transportverschijnselen. Natuurlijk komt ook aan de orde de methode van scheiden van variabelen met daaraan gekoppeld de Fourier-reeksen voor de diffusie-, de Laplace- en de golfvergelijking. Tevens behandelen we functies van Green voor de Laplace-vergelijking en de methode van D'Alembert voor de golfvergelijking. Ten slotte construeren we de fundamentele oplossing van de niet-lineaire poreuze-mediavergelijking en van de Burgers-vergelijking.

Oktober 2001,

C.J. van Duijn	M.J. de Neef
TU Eindhoven	TU Delft

Inhoud

Lijst van Figuren

Deel I

Beginwaardeproblemen voor gewone differentiaalvergelijkingen

Hoofdstuk 1

Fundamentele aspecten van beginwaardeproblemen

1.1 Inleiding

Veel problemen uit de natuurkunde worden beschreven door differentiaalvergelijkingen, waarin de onbekende(n) en afgeleide daarvan voorkomen als functie van maar één onafhankelijke variabele (bijvoorbeeld de tijd of een plaatscoördinaat). We spreken in zo'n geval van *gewone* differentiaalvergelijkingen. Verder spreken we van een k^{e}-orde ($\geqslant 1$) vergelijking als de orde van hoogst voorkomende afgeleide k is.

Dikwijls kunnen vergelijkingen van orde $\geqslant 2$ geschreven worden als een stelsel eerste-orde vergelijkingen. We illustreren dit voor $k = 2$ aan de hand van de lineaire differentiaalvergelijking

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = 0.$$

Hierin geven de accenten differentiatie naar t aan en zijn p, q bekende coëfficiënten. Stellen we $u_1 = u$ en $u_2 = u'$, dan onstaat het stelsel

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2, \\ u_2' &= -qu_1 - pu_2, \end{aligned}$$

ofwel

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ -qu_1 - pu_2 \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

met

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix}.$$

Dus zonder onszelf erg te beperken kunnen we ons richten op (stelsels) eerste-orde gewone differentiaalvergelijkingen. In dit hoofdstuk beschouwen we beginwaardeproblemen voor zulke stelsels. De wiskundige formulering van zo'n probleem luidt:

Zoek een differentieerbare vectorfunctie (of gladde kromme)

$$\mathbf{u} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \qquad (\mathbf{u} = (u_1(t),\, u_2(t),\, \ldots,\, u_n(t)), n \geqslant 1)$$

zodat

$$\text{(BWP)} \begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, t) & \forall t \in I, \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 & t_0 \in I. \end{cases} \tag{1.1}$$

Hierin is het rechterlid van (1.1) een afbeelding

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,$$

die aan ieder punt $(\mathbf{u}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ het punt (de vector) $\mathbf{F}(\mathbf{u}, t) \in \mathbb{R}^n$ toevoegt. Verder is de vector $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ de startvector of de beginwaarde voor Probleem (BWP).

De bedoeling is dus om de onbekende functie $\mathbf{u}(t)$ te vinden die aan de differentiaalvergelijking (1.1) voldoet en die op het tijdstip $t = t_0$ samenvalt met de gegeven vector $\mathbf{u}_0$. Deze oplossing van Probleem (BWP) beschrijft een baan in de Euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$. Door vergelijkingen van het type (1.1) wordt op ieder tijdstip de snelheid $d\mathbf{u}/dt$ bepaald door de positie $\mathbf{u}(t)$ en door de tijd t.

We noemen de differentiaalvergelijking (1.1) *autonoom* als de functie $\mathbf{F}$ niet expliciet van t afhangt, m.a.w. als

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{u}).$$

In fysische modellen komt dit vaak voor. De differentiaalvergelijking is *lineair* als $\mathbf{F}$ een lineaire functie is in de variabelen $u_1, \ldots, u_n$, d.w.z $\mathbf{F}$ is van de vorm:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, t) = A(t)\mathbf{u} + \mathbf{b}(t),$$

waarin $A(t)$ een $n \times n$-matrix is.

Bij het bestuderen van Probleem (BWP) onderscheiden we globaal de volgende werkwijzen:

(i) Het zoeken naar expliciete oplossingen in gesloten vorm. Dit is alleen mogelijk in bijzondere gevallen, waarvan wij er enkele zullen bespreken. Dit levert dus $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ als formule op.

(ii) Kwalitatief redeneren, d.w.z. belangrijke karakteristieken van de oplossing geven zonder deze expliciet te kennen. Hier zullen we flink wat aandacht aan besteden.