

Analyse van differentiaalvergelijkingen

Analyse van differentiaalvergelijkingen

C.J. van Duijn en M.J. de Neef

© VSSD

Eerste druk 1995, tweede druk 2001

Uitgegeven door de VSSD

Leeghwaterstraat 42, 2628 CA Delft, The Netherlands

tel. +31 15 27 82124, telefax +31 15 27 87585, e-mail: hlf@vssd.nl

internet: <http://www.vssd.nl/hlf>

URL over dit boek: **<http://www.vssd.nl/hlf/a007.htm>**

De uitgever stelt aan docenten die dit boek in cursusverband gebruiken, desgewenst de collectie illustraties en/of een elektronische versie ter beschikking. Een verzoek kan ingediend worden bij hlf@vssd.nl

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photo-copying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

Gedrukte editie: ISBN 978-90-407-1265-4

Elektronische versie: ISBN 978-90-6562-109-2

NUR 919

Trefw.: differentiaalvergelijkingen

Voorwoord

Het modelleren van verschijnselen uit de technische wetenschappen en natuurkunde komt dikwijls neer op het combineren van constitutieve- en balansvergelijkingen, en daarmee op een formulering in termen van differentiaalvergelijkingen. Afhankelijk van de aard van het probleem krijgen we te maken met (stelsels) gewone of partiële differentiaalvergelijkingen en met nevencondities in de vorm van begin- en/of randwaarden.

In deze tweede editie richten we ons op tweedejaars studenten Wiskunde en Natuurkunde in de nieuwe bachelor's structuur. De behandelde stof veronderstelt een eerstejaars calculus achtergrond en enige elementaire lineaire algebra. Voor zover abstracte begrippen aan de orde komen, is gekozen voor een vorm waarbij wiskundigen én natuurkundigen zich thuis voelen: hier en daar wordt een bewijs uitgewerkt en naar de wat abstracte literatuur verwezen zonder de begripsopbouw voor de natuurkundigen te veel te verstoren.

Natuurlijk ligt bij een inleidende cursus als deze de nadruk op elementaire en werkbare technieken die de studenten in de latere fase van hun studie nodig hebben. Daarnaast hebben we getracht ook enkele moderne ontwikkelingen te laten doorklinken. Met name het 'klassieke' standpunt dat iedere differentiaalvergelijking exact oplosbaar is in termen van een min of meer expliciete uitdrukking (de zogenaamde analytische oplossing), ondervindt concurrentie van de filosofie van het kwalitatief redeneren. Immers, dikwijls kan nuttige informatie uit een differentiaalvergelijking worden verkregen, bijvoorbeeld over stabiliteit van evenwichten, zonder de oplossing zelf te kennen. Om dit te ondersteunen behandelen we uitvoerig de fasevlakanalyse voor gewone differentiaalvergelijkingen en vergelijkingsprincipes voor partiële differentiaalvergelijkingen. Tevens worden een tweetal voorbeelden van niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen behandeld, waaronder de vergelijking van Burgers.

De stof wordt in drie delen gepresenteerd. In deel I wordt vrij uitvoerig ingegaan op de theorie en toepassingen van beginwaardeproblemen voor gewone differentiaalvergelijkingen. We behandelen de existentie- en eenduidigheidsresultaten, de fasevlak- en stabiliteitsanalyse en we geven de gebruikelijke rekenregels voor eerste- en tweede-orde vergelijkingen.

In deel II behandelen we enkele belangrijke eigenwaardeproblemen uit de quantummechanica, zoals de harmonische oscillator en het waterstofatoom, en we geven een aantal speciale functies als resultaat van machtrekssubstitutie. Tevens worden functies van Green en enkele aspecten van de Sturm-Liouville-theorie behandeld.

Als laatste, in deel III, behandelen we partiële differentiaalvergelijkingen. We bespreken vergelijkingsprincipes en eenduidigheidsresultaten en geven ruim aandacht aan gelijkvormigheidsoplossingen voor diffusievergelijkingen, omdat deze een belangrijke rol spelen binnen het vakgebied der Fysische Transportverschijnselen. Natuurlijk komt ook aan de orde de methode van scheiden van variabelen met daaraan gekoppeld de Fourier-reeksen voor de diffusie-, de Laplace- en de golfvergelijking. Tevens behandelen we functies van Green voor de Laplace-vergelijking en de methode van D'Alembert voor de golfvergelijking. Ten slotte construeren we de fundamentele oplossing van de niet-lineaire poreuze-mediavergelijking en van de Burgers-vergelijking.

Oktober 2001,

C.J. van Duijn
TU Eindhoven

M.J. de Neef
TU Delft

Inhoud

I	Beginwaardeproblemen voor gewone differentiaalvergelijkingen	15
1	Fundamentele aspecten van beginwaardeproblemen	17
1.1	Inleiding	17
1.2	Voorbeelden	20
1.3	Existentie en eenduidigheid	24
1.4	Oplossingen als banen in het fasevlak	35
1.5	Enkele expliciete methoden	40
1.5.1	Vergelijkingen van de vorm: $u' + p(t)F(u) = 0$	41
1.5.2	Vergelijkingen van de vorm: $u' + p(t)u = r(t)$	41
1.5.3	Vergelijkingen van de vorm: $u' + p(t)u = r(t)u^k$, $k \in \mathbb{Z}$ ($k \neq 1$)	42
1.5.4	Exacte differentiaalvergelijkingen	43
1.5.5	Vergelijkingen van de vorm: $u'' = F(t, u')$	44
1.5.6	Vergelijkingen van de vorm: $u'' = F(u, u')$	45
1.5.7	Vergelijkingen van de vorm: $u'' = F(u)$	46
2	Tweede-orde lineaire differentiaalvergelijkingen	51
2.1	Inleiding	51
2.2	Structuur van de oplossing	53
2.3	Expliciete rekenmethoden	59
2.3.1	Reductie van de orde	59
2.3.2	Homogene vergelijking met constante coëfficiënten	61
2.3.3	Inhomogene vergelijking	62
2.3.4	Particuliere oplossingen voor bijzondere brontermen	63
2.3.5	Methode van variatie van constanten	67
2.4	Oplossingen als banen in het fasevlak	68
3	Stabiliteit van evenwichten van niet-lineaire autonome stelsels	81
3.1	Inleiding en definitie stabiliteit	81
3.2	Linearisering rond een evenwicht	83
3.3	Liapunov-functies	89

A	Existentie door middel van de expliciete Euler-methode	99
II	Eigenwaardeproblemen en bijzondere functies	107
4	Eigenwaardeproblemen in de quantummechanica	109
4.1	Inleiding	109
4.2	Deeltje in oneindig diepe potentiaalput	111
4.3	Deeltje in eindig diepe potentiaalput	112
4.4	De harmonische oscillator	114
4.5	Het waterstofatoom	118
5	Methode van machtreekssubstitutie	131
5.1	Machtreeksoplossing rond een normaal punt	131
5.2	De Euler-vergelijking	134
5.3	Machtreeksoplossing nabij een regulier-singulier punt	135
5.4	De Bessel-vergelijking	138
6	Tweede-orde randwaardeproblemen	147
6.1	Inleiding	147
6.2	Sturm-Liouville-problemen	149
6.3	Functies van Green	154
III	Partiële Differentiaalvergelijkingen	161
7	Formulering en achtergrond van de problemen	163
8	De diffusievergelijking	169
8.1	Eenduidigheid	169
8.2	Gelijkvormigheidsoplossing op $(0, \infty)$	171
8.3	Gelijkvormigheidsoplossing op $(-\infty, \infty)$	174
8.4	Algemeen beginwaardeprobleem op $(-\infty, \infty)$	175
8.5	Randwaardeprobleem op $(0, L)$	178
8.6	Fourier-reeksen met sinus- en cosinustermen	183
9	De Laplace-vergelijking	193
9.1	Eenduidigheid, fundamentele oplossing en functies van Green . . .	193
9.2	Laplace-vergelijking in een strook in \mathbb{R}^2	198
9.3	Laplace-vergelijking op een taartpunt in \mathbb{R}^2	200
10	Golfvergelijking	205
10.1	Energierelatie, eenduidigheid	205
10.2	Randwaardeprobleem op $(0, L)$	206

10.3	Beginwaardeprobleem op $(-\infty, \infty)$	209
11	Enkele niet-lineaire vergelijkingen	215
11.1	De poreuze-mediavergelijking	215
11.2	De Burgers-vergelijking	218
11.2.1	Lopende golven	218
11.2.2	Fundamentele oplossing	220

Lijst van Figuren

1.1	Oplossingen van Voorbeeld 1.2.1 voor verschillende waarden van α .	21
1.2	Bifurcatiediagram voor de Landau-vergelijking.	22
1.3	Oplossing van Voorbeeld 1.2.3 voor $\alpha = 1$.	23
1.4	Familie van oplossingen in Voorbeeld 1.2.4 (geen eenduidigheid).	24
1.5	De slinger.	25
1.6	Banen in het fasevlak voor de slinger zonder wrijving. Voor het bepalen van de banen is gebruik gemaakt van uitdrukking (1.14)	37
1.7	Banen in het fasevlak voor de slinger met wrijving, bepaald door numerieke integratie van de differentiaalvergelijkingen met $g/l = 1$ en $k/m = 1$.	40
1.8	Uitvergroting van de situatie in een omgeving van het zadelpunt $(-\pi, 0)$.	41
2.1	Lokaties van nulpunten en extrema van u_1 en u_2 .	57
2.2	Een RLC-circuit.	63
2.3	Amplitude modulatie	67
2.4	Ontbinding van een startvector \mathbf{u}_0 in termen van \mathbf{k}_1 en \mathbf{k}_2 .	69
2.5	Faseportret van een instabiel knooppunt.	70
2.6	Faseportret van een zadelpunt.	71
2.7	Faseportretten van een stabiel knooppunt (links) en een instabiel knooppunt (rechts), voor $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ met $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ lineair onafhankelijk.	72
2.8	Faseportretten van een stabiel knooppunt (links) en een instabiel knooppunt (rechts), voor $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ zonder een volledig stelsel eigenvectoren.	72
2.9	Voorbeeld van een instabiel knooppunt met samenvallende eigenwaarden.	74
2.10	$\alpha = 0$, zuiver imaginaire eigenwaarden: de oorsprong is een centrum.	75
2.11	Faseportretten van een stabiel spiraal punt (links, $\alpha < 0$) en een instabiel spiraal punt (rechts, $\alpha > 0$).	75
2.12	Faseportret van vergelijking (2.28).	77

3.1	Stabiliteit.	82
3.2	Asymptotische stabiliteit.	82
3.3	Instabiliteit.	83
3.4	Geometrische interpretatie van de Stelling van Liapunov.	90
3.5	Banen in het fasevlak voor de niet-lineaire oscillator van Voorbeeld 3.3.5 met $\alpha = 1$	94
A.1	Stuksgewijs lineaire benadering van de oplossing ($n = 1$).	100
A.2	Partitie van het interval $[0, a]$	101
A.3	Voorbeeld van functie $\varphi \in C_0^1(J)$	101
4.1	Bepaling van de energieniveaus voor een deeltje in een eindig diepe potentiaalput.	113
4.2	Bolcoördinaten.	119
4.3	Even en oneven Legendre-polynomen.	122
4.4	Enkele bolfuncties, vnr: $Y_{0,0}, Y_{1,0}, Y_{1,1}, Y_{2,0}, Y_{2,1}, Y_{2,2}$	125
5.1	Twee lineair onafhankelijke machtreeksoplossingen van de vergelijking van Airy.	133
5.2	Nulde-orde en eerste-orde Bessel-functies	140
5.3	De eerste vier modi voor $t = 0$: $u_i = J_0(\mu_i r)$, $i = 1, 2, 3, 4$	144
6.1	Voorbeelden van functies met $f, f' \in C_{pw}([0, 1])$	152
7.1	Randwaarden voor vergelijking (7.8).	165
8.1	De grafieken voor $f(\eta)$ en de concentratie $C(x, t)$	173
8.2	Concentratie is constant langs parabolen in x, t -vlak.	174
8.3	Het verloop van de concentratie $C(x, t)$ op verschillende tijdstippen.	175
8.4	Het diffusiegedrag van een puls bij toenemende tijd	176
8.5	Voorbeeld van constructie van f : oneven voortzetting	187
8.6	Voorbeeld van constructie van f : even-voortzetting	187
8.7	Oneven voortzetting van $f(x)$	188
8.8	Even voortzetting van $f(x)$	189
9.1	Laplace-vergelijking op een strook.	199
9.2	Laplace-vergelijking op een taartpunt.	201
9.3	Het randwaardeprobleem in poolcoördinaten	201
10.1	Een snaar met vaste uiteinden.	207
10.2	Randwaardeprobleem voor de golfvergelijking in het (x, t) -vlak.	207
10.3	De oplossing $u(x, t)$ op de tijdstippen $t = 0, \frac{1}{2c}, \frac{1}{c}, \frac{2}{c}$	211
10.4	De beginsnelheidsverdeling $g(x)$	211
10.5	De functie $G(x)$	212

10.6	De oplossing $u(x, t)$ op de tijdstippen $t = \frac{1}{2c}$ en $t = \frac{2}{c}$	212
11.1	Gelijkvormigheidsprofiel (11.15) voor $1 < m < 2$ (links), $m = 2$ (midden) en $m > 2$ (rechts).	217
11.2	Fundamentele oplossing met fronten.	218
11.3	Lokatie van de schok in de limietoplossing u^0	220
11.4	De gelijkvormigheidsoplossing ϕ	222
11.5	De fundamentele oplossing op enkele achtereenvolgende tijdstip- pen.	222
11.6	Lokatie van de schok in de limietoplossing u^0	223

Deel I

Beginwaardeproblemen voor
gewone
differentiaalvergelijkingen

Hoofdstuk 1

Fundamentele aspecten van beginwaardeproblemen

1.1 Inleiding

Veel problemen uit de natuurkunde worden beschreven door differentiaalvergelijkingen, waarin de onbekende(n) en afgeleide daarvan voorkomen als functie van maar één onafhankelijke variabele (bijvoorbeeld de tijd of een plaatscoördinaat). We spreken in zo'n geval van *gewone* differentiaalvergelijkingen. Verder spreken we van een k^e -orde (≥ 1) vergelijking als de orde van hoogst voorkomende afgeleide k is.

Dikwijls kunnen vergelijkingen van orde ≥ 2 geschreven worden als een stelsel eerste-orde vergelijkingen. We illustreren dit voor $k = 2$ aan de hand van de lineaire differentiaalvergelijking

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = 0.$$

Hierin geven de accenten differentiatie naar t aan en zijn p, q bekende coëfficiënten. Stellen we $u_1 = u$ en $u_2 = u'$, dan ontstaat het stelsel

$$\begin{aligned}u_1' &= u_2, \\u_2' &= -qu_1 - pu_2,\end{aligned}$$

ofwel

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & u_2 \\ -qu_1 - pu_2 & \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

met

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix}.$$

Dus zonder onszelf erg te beperken kunnen we ons richten op (stelsels) eerste-orde gewone differentiaalvergelijkingen. In dit hoofdstuk beschouwen we beginwaardeproblemen voor zulke stelsels. De wiskundige formulering van zo'n probleem luidt:

Zoek een differentieerbare vectorfunctie (of gladde kromme)

$$\mathbf{u} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (\mathbf{u} = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)), n \geq 1)$$

zodat

$$(BWP) \begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, t) & \forall t \in I, \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 & t_0 \in I. \end{cases} \quad (1.1)$$

Hierin is het rechterlid van (1.1) een afbeelding

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

die aan ieder punt $(\mathbf{u}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ het punt (de vector) $\mathbf{F}(\mathbf{u}, t) \in \mathbb{R}^n$ toevoegt. Verder is de vector $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ de startvector of de beginwaarde voor Probleem (BWP).

De bedoeling is dus om de onbekende functie $\mathbf{u}(t)$ te vinden die aan de differentiaalvergelijking (1.1) voldoet en die op het tijdstip $t = t_0$ samenvalt met de gegeven vector \mathbf{u}_0 . Deze oplossing van Probleem (BWP) beschrijft een baan in de Euclidische ruimte \mathbb{R}^n ($n \geq 1$). Door vergelijkingen van het type (1.1) wordt op ieder tijdstip de snelheid $d\mathbf{u}/dt$ bepaald door de positie $\mathbf{u}(t)$ en door de tijd t .

We noemen de differentiaalvergelijking (1.1) *autonoom* als de functie \mathbf{F} niet expliciet van t afhangt, m.a.w. als

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{u}).$$

In fysische modellen komt dit vaak voor. De differentiaalvergelijking is *lineair* als \mathbf{F} een lineaire functie is in de variabelen u_1, \dots, u_n , d.w.z. \mathbf{F} is van de vorm:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, t) = A(t)\mathbf{u} + \mathbf{b}(t),$$

waarin $A(t)$ een $n \times n$ -matrix is.

Bij het bestuderen van Probleem (BWP) onderscheiden we globaal de volgende werkwijzen:

- (i) Het zoeken naar expliciete oplossingen in gesloten vorm. Dit is alleen mogelijk in bijzondere gevallen, waarvan wij er enkele zullen bespreken. Dit levert dus $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ als formule op.
- (ii) Kwalitatief redeneren, d.w.z. belangrijke karakteristieken van de oplossing geven zonder deze expliciet te kennen. Hier zullen we flink wat aandacht aan besteden.