Inleiding Kansrekening en Statistiek

Inleiding Kansrekening en Statistiek

S.J. de Lange

VSSD

Eerste druk 1989
Tweede druk 1991 - 2007

Uitgegeven door de VSSD
Poortlandplein 6, 2628 BM Delft, The Netherlands
tel. +31 15 27 82124, telefax +31 15 27 87585, e-mail: hlf@vssd.nl
internet: http://www.vssd.nl/hlf
URL met informatie over dit boek: **http://www.vssd.nl/hlf/a014.htm**

Printed in The Netherlands.

ISBN-10 90-6562-095-8
ISBN-13 978-90-6562-095-8
NUR 916
Keywords: kansrekening, statistiek

Voorwoord

Dit boek is geschreven voor technische studenten die in één semester enige vaardigheid moeten krijgen in het hanteren van de begrippen en methoden van de kansrekening.
De zeer beperkte tijd die in de diverse studieprogramma's voor dit vak beschikbaar is heeft tot gevolg dat enige onderwerpen, die zelfs op dit niveau eigenlijk niet mogen ontbreken, niet of nauwelijks worden genoemd. Zo ontbreken voortbrengende en karakteristieke functies geheel en is de combinatoriek te vluchtig behandeld.
Daar statistiek een belangrijk toepassingsgebied is van de kansrekening worden ook de statistische standaardtechnieken behandeld.
De leer der verzamelingen is bekend verondersteld evenals de analyse die in het eerste jaar aan de TU Delft wordt onderwezen (in het bijzonder het berekenen van meervoudige integralen). De kansrekening zelf wordt echter, zij het beknopt, van de grond af aan opgebouwd.
Vooral in de latere hoofdstukken wordt een beroep op de intuïtie en de goedgelovigheid van de lezer gedaan. Het boek is dan ook niet bestemd voor (aspirant-) wiskundigen. Achterin is een aantal statistische tabellen opgenomen. Voor het toepassen van de besproken technieken zijn deze tabellen voldoende.
Vanzelfsprekend zijn op- en aanmerkingen, vooral voorstellen ter verbetering, welkom.
De vraagstukken zijn voor een deel overgenomen uit *Vraagstukken over waarschijnlijkheidsrekening* van dr. P.J.A. Kanters. Ik dank hem voor zijn toestemming daartoe. Mijn dank gaat voorts uit naar ir. Th.C.A. Mensch en dr. J.A.M. v.d. Weide voor hun bijdragen bij de totstandkoming van de inhoud. Zeer veel dank ben ik verschuldigd aan mevr. F.A. Zuidervaart-Murray en de medewerkers van de VSSD voor de prettige samenwerking bij de produktie van dit boek.

Delft, december 1988 S.J. de Lange

BIJ DE TWEEDE OPLAGE

In deze nieuwe oplage zijn de wijzigingen beperkt tot enkele noodzakelijke correcties.

Delft, december 1991 S.J. de Lange

Inhoud

Notatie

Stochastische variabelen zijn aangeduid door onderstreping.

$\underline{x} \sim \ldots$: de stochastische variabele $\underline{x}$ heeft de … verdeling.

$a \approx b$: a is ongeveer gelijk aan b.

$P(\lambda)$: Poisson-verdeling met parameter λ.

$Exp(\lambda)$: Exponentiële verdeling met parameter λ, waarbij is gekozen voor die variant waarbij de verwachting $1/\lambda$ is.

$N(a;b)$: Normale verdeling met verwachting a en variantie b.

$B(n;p)$: Binomiale verdeling met parameters n en p.

$NB(r;p)$: Negatief-binomiale verdeling met parameters r en p.

Literatuur

Er zijn veel inleidende boeken over kansrekening en statistiek. Het merendeel is in het Engels. Uit die overvloed worden er slechts enkele genoemd.

Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. I and Vol. II, John Wiley, New York.

Genugten, B.B. van der, *Inleiding tot de Waarschijnlijkheidsrekening en de Mathematische Statistiek*, deel I, Stenfert Kroese, Leiden.

Hogg, R.V. and A.T. Craig, *Introduction to Mathematical Statistics*, Collier MacMillan International Editions, London.

Kanters, dr. P.J.A., *Vraagstukken over waarschijnlijkheidsrekening*, DUM, Delft.

Larson, H.J., *Introduction to Probability Theory and Statistical Inference*, John Wiley, New York.

Meelen, A.J., J. van Soest en J.M.G. Vermeulen, *Aanvulling op Elementaire Statistiek*, DUM, Delft.

Mood, A.M., F.A. Graybill and D.C. Boes, *Introduction to the Theory of Statistics*, McGraw-Hill, New York.

Roes, P.B.M. en H.J.L. van Oorschot, *Kansrekening en Statistiek*, DUM, Delft.

Soest, ir. J. van, *Elementaire Statistiek*, DUM, Delft.

Stam, dr. A.J., *Inleiding tot de Waarschijnlijkheidsrekening*, Technische Uitgeverij H. Stam, Haarlem.

1 Kansrekening

1.1. Uitkomstenruimte en gebeurtenissen

In den beginne was er het experiment. Het resultaat dat optreedt na uitvoering van een experiment, de uitkomst, kan afhankelijk zijn van het toeval. Als dat het geval is schieten de gebruikelijke deterministische methoden tekort en moet men de kansrekening gebruiken om numerieke uitspraken te formuleren over de gevolgen van de uitvoering van het experiment.

Definities

- Een *experiment* is een handeling met één of meer mogelijke resultaten (uitkomsten).
- De *uitkomstenruimte*, Ω, is de verzameling van alle mogelijke uitkomsten van het experiment.
  Een element van Ω duiden we aan met ω.
- Een *gebeurtenis* A is een deelverzameling van de uitkomstenruimte Ω. De gebeurtenis A treedt op als het experiment eindigt in een van de uitkomsten die tot A behoren.
- Het *complement* $\overline{A}$ van de gebeurtenis A is de gebeurtenis dat A niet optreedt.
- Een *elementaire gebeurtenis* $\{\omega\}$ is een deelverzameling van Ω die slechts één element bevat.
- De *zekere gebeurtenis* is die deelverzameling van Ω die alle elementen van Ω bevat, m.a.w. Ω zelf.
- Een *onmogelijke gebeurtenis*, Φ, is een deelverzameling van Ω die geen enkel element bevat, m.a.w. een lege verzameling.
- Twee gebeurtenissen A en B heten *disjunct* of elkaar uitsluitend als $A \cap B = \Phi$.

Het aantal elementen van Ω kan eindig zijn of oneindig. In het laatste geval kan het aantal elementen aftelbaar zijn of meer dan aftelbaar. Is het aantal elementen eindig of aftelbaar dan noemt men Ω discreet.

Voorbeelden

a. Gooi een dobbelsteen éénmaal. Mogelijke uitkomsten: $1, 2, 3, 4, 5, 6$;

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. De gebeurtenis A: ‘de worp is even’ bevat de uitkomsten 2, 4 en 6; $A = \{2,4,6\}$. De gebeurtenis B: ‘de worp is oneven’ bevat de uitkomsten 1, 3 en 5; $B = \{1,3,5\}$.

$$A \cap B = \Phi; \; A \cup B = \Omega; \; \overline{A} = B.$$

b. Gooi een dobbelsteen net zo lang totdat de eerste 6 valt. De uitkomst van het experiment is het aantal malen dat de dobbelsteen moet worden gegooid.

$$\Omega = \{1,2,3,\ldots\}.$$

De uitkomstenruimte heeft oneindig veel elementen maar is aftelbaar.

c. Schiet op een schietschijf met een straal van 25 cm. De uitkomst van het experiment is de afstand in centimeters tussen het middelpunt van de schijf en het punt waar het schot de schijf heeft getroffen. Het is mogelijk dat de schijf niet wordt geraakt; ongeacht hoever het schot ernaast gaat, noemen we zo’n uitkomst ‘mis’. De elementen van Ω hoeven dus niet gelijksoortig te zijn.

$$\Omega = \{\text{mis}\} \cup \{x \mid 0 \leq x \leq 25\}.$$

De uitkomstenruimte heeft meer dan aftelbaar veel elementen.
Zij A de gebeurtenis dat de schijf op minder dan 10 cm van het middelpunt wordt geraakt:

$$A = \{x \mid 0 \leq x < 10\}.$$

Zij B de gebeurtenis dat de schijf *niet* op minder dan 10 cm van het middelpunt wordt geraakt, m.a.w. $B = \overline{A}$:

$$B = \{\text{mis}\} \cup \{x \mid 10 \leq x \leq 25\}.$$

d. Gooi een rode en een groene dobbelsteen. Mogelijke uitkomsten: (1,1),(1,2), …, (1,6),(2,1),…,(6,6) waarbij steeds het eerste getal het aantal ogen van de rode dobbelsteen aangeeft en het tweede getal dat van de groene.

$$\Omega = \{(i,j) \mid i = 1, 2, \ldots, 6; \; j = 1,2,\ldots,6\}.$$

De uitkomstenruimte bevat 36 elementen. Elk element bestaat uit een tweetal (i,j).
Zij A de gebeurtenis: ‘het totale aantal ogen bij de worp is niet groter dan 4’:

$$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}.$$

e. Laat de waterhoogte in cm ten opzichte van N.A.P., op een bepaald moment, op tien plaatsen langs de kust opmeten en registreer de resultaten:

$$\Omega = \{(x_1,x_2,\ldots,x_{10}) \mid a_i \leq x_i \; ; \; i = 1,2,\ldots,10\}.$$

2

Stochastische variabelen

2.1. Kansfunctie

Veelal is van de uitkomst van een experiment alleen een bepaald aspect van belang. Als zich dit dan ook nog met behulp van een getal laat beschrijven kan met vrucht gebruik worden gemaakt van de technieken die zijn ontwikkeld voor stochastische variabelen.

Definitie

Een stochastische variabele is een functie van Ω naar $\mathbb{R}$. ❑

Met andere woorden, een stochastische variabele kent aan elke $\omega \in \Omega$ een reëel getal toe. Heeft men meer getallen nodig om de eigenschappen van de uitkomst die van belang zijn vast te leggen dan kan men werken met een stochastische vector.

Definitie

Een stochastische vector is een functie van Ω naar $\mathbb{R}^n$. ❑

Voorbeeld

1. Herhaal viermaal een experiment dat kan resulteren in s = succes of m = mislukking.
De volgende vier elementen van Ω: (m, m, m, s), (m, m, s, m), (m, s, m, m) en (s, m, m, m) hebben gemeen dat er steeds 1 succes en 3 mislukkingen optreden. Als we alleen geïnteresseerd zijn in het aantal successen in de proevenreeks dan is een stochastische variabele toepasselijk die aan elke $\omega \in \Omega$ het getal toekent dat het bijbehorende aantal successen aangeeft. In dit geval dus 0, 1, 2, 3 of 4.

Een stochastische variabele wordt aangeduid door onderstreping, de waarde die een stochastische variabele $\underline{x}$ aan $\omega \in \Omega$ toekent door $\underline{x}(\omega)$. Na uitvoering van het experiment is bekend welke waarde $\underline{x}$ heeft aangenomen. Die waarde heet een realisatie van $\underline{x}$. De verzameling van alle mogelijke realisaties heet het waardenbereik W_x van $\underline{x}$.

Bijvoorbeeld in het voorgaande voorbeeld: $\underline{x}$ is het aantal successen bij het viermaal herhalen van het experiment. Het waardenbereik van $\underline{x}$ is $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Als $\omega_1 =$ (m, s, m, s) dan is $\underline{x}(\omega_1) = 2$.