Regelmaat in de ruimte

Regelmaat in de ruimte

A.K. van der Vegt

VSSD

Eerste druk 1991, tweede druk 2002

Uitgave van:
VSSD
Leeghwaterstraat 42, 2628 CA Delft, The Netherlands
tel. +31 15 27 82124, telefax +31 15 27 87585, e-mail: hlf@vssd.nl
internet: http://www.vssd.nl/hlf

URL over dit boek: **http://www.vssd.nl/hlf/a017.htm**
Voor docenten die dit boek in cursusverband gebruiken is de verzameling digitale illustraties beschikbaar die in het boek is afgedrukt. Een verzoek tot verkrijging van de verzameling kan men richten aan email-adres hlf@vssd.nl.

ISBN 978-90-407-1274-6
NUR 918
Trefw:: meetkunde

Voorwoord

Dit boekje gaat over een heel oud onderwerp. Al eeuwen geleden waren er mensen die door veelvlakken geboeid werden en een groot deel van hun tijd besteedden aan het opsporen en analyseren van regelmatige structuren. In de terminologie van de veelvlakken kom je dan ook namen tegen als Archimedes, Pythagoras, Plato en Kepler.
Veelvlakken spelen vandaag de dag een rol in onder andere de kristallografie, de beeldende kunst (Escher!), de bouwkunde en, vooral, in de ‘polyedrofilie’. Met dit laatste bedoel ik het verschijnsel dat een klein aantal mensen zo verrukt zijn van veelvlakken (polyeders), dat ze het niet kunnen laten om er mee te spelen, ze te analyseren, ze te plakken of ze te boetseren, en bovenal zich erin te verlustigen, zodat men dit verschijnsel eigenlijk ‘polyedromanie’ zou moeten noemen.
Met alle lezers die mijn enthousiasme delen, acht ik me, en ook gelet op bovengenoemde namen, in goed gezelschap. Tientallen jaren spelen met veelvlakken heeft uiteindelijk tot dit boekje geleid. Ik hoop dat het lotgenoten zal stimuleren om hun hobby nog intensiever te beoefenen.
Dit boekje pretendeert geen historisch-wetenschappelijke verhandeling te zijn. Literatuur wordt daarom, op een kort historisch overzicht na, niet of nauwelijks vermeld. Als duidelijke uitzondering noem ik echter speciaal het prachtige boek van Wenninger: ‘Polyhedron models’, een unieke foto-verzameling van door de auteur zelf geplakte modellen van eenvoudige tot uiterst gecompliceerde veelvlakken.
Ten slotte nog iets over de figuren. Deze zijn tot stand gekomen door een combinatie van:

- toepassing van een beetje analytische meetkunde, om vanuit de coördinaten der hoekpunten, die der zijvlakken te berekenen, en voor de ‘tweede soort’, raakvlakken en hun snijlijnen.
- een serie eenvoudig te schrijven BASIC-programma’s, met als meest gecompliceerd onderdeel het bepalen van de zichtbare delen van ribben bij hogere-orde veelvlakken,
- een Archimedes 310 als krachtig en zeer snel rekentuig,
- een voor de Archimedes geschreven tekenprogramma: ‘Superdump’, waarmee het printen met hoge resolutie mogelijk is.

Ieder die belangstelling heeft in meer details, is welkom voor verdere informatie.

Delft, mei 1991 — A.K. van der Vegt

Voorwoord bij de tweede druk

In deze tweede druk is een aantal fouten hersteld en zijn enkele aanvullingen aangebracht. Vele figuren zijn duidelijker én eleganter geworden door het inkleuren met schaduwtinten, een werkje dat vergemakkelijkt werd door een uitgebreider BASIC-programma. Wellicht zullen de lezers deze veranderingen op prijs stellen.

Delft, maart 2002 A.K. van der Vegt

Inhoud

1 Inleiding

1.1. Waar gaat het over?

Vraag je aan iemand, een veelvlak te noemen, dan is het meest voor de hand liggende antwoord: een kubus. Die kennen we als dobbelsteen of als doos, maar ook in vervormde gedaante, als rechthoekig of scheefhoekig blok. Ook prisma’s zijn bekend: staven met vlakke kanten (als er vier kanten zijn, zitten we weer in de buurt van de kubus). Verder: piramiden, beroemd vanuit Egypte.
Maar niet alle denkbeeldige veelvlakken zijn voor dit boekje van belang: alleen die exemplaren die een duidelijke regelmaat vertonen, bijvoorbeeld omdat alle hoekpunten en/of alle zijvlakken gelijk en/of regelmatig zijn. De blokken en de piramiden vallen dan af, behalve als de piramide driezijdig is, want dan kan hij uit vier gelijkzijdige driehoeken bestaan.
Zo hebben we al twee geheel regelmatige veelvlakken gezien: de kubus (het zesvlak) en het viervlak. Er blijken, zoals we al snel zullen ontdekken, nog drie te bestaan: het achtvlak, het twaalfvlak en het twintigvlak. Dit vijftal is al boeiend genoeg om uitvoerig te bekijken, elk op zichzelf en in hun onderlinge relaties.
Maar er is meer! Op verschillende manieren kunnen we onze verzameling uitbreiden, bijvoorbeeld door concessies te doen aan de eis van volledige regelmaat (we komen dan bij de half-regelmatige veelvlakken terecht) en ook door naar stervormige lichamen te kijken. Hele werelden gaan dan open, die we in dit boekje een beetje zullen gaan verkennen.
Maar eerst een heel summier overzicht over wat de mens in de afgelopen 25 eeuwen over veelvlakken te weten is gekomen.

1.2. Een oud onderwerp

2500 jaar geleden (rond 520 voor Christus) wist Pythagoras al van het bestaan van drie van de vijf geheel regelmatige veelvlakken: hij beschreef de kubus, het viervlak en het twaalfvlak.
Plato (rond 350 voor Christus) kende ze alle vijf, inclusief achtvlak en twintigvlak, en bracht ze als ‘kosmische bouwstenen van de wereld’ in verband met de vijf elementen: vuur, lucht, water, aarde en ‘hemelmaterie’. Vandaar de aanduiding van het vijftal als ‘Platonische lichamen’. Euklides (rond 300 voor Christus) beschreef ze nog eens in

groter detail.
Aan Archimedes (rond 250 voor Christus) wordt door Pappus (500 jaar later!) kennis van de 13 halfregelmatige of Archimedische lichamen toegeschreven.
Dan, na een heel lange tijd, komt Kepler (1571–1630) [1] met een samenvattende beschrijving van de vijf Platonische en de dertien Archimedische lichamen. Van Kepler is ook de gedachte dat de vijf Platonische lichamen verband houden met de structuur van het zonnestelsel (er waren, behalve de Aarde, in die tijd nog maar vijf planeten bekend!). Kepler kwam bovendien op het idee dat ook pentagrammen (regelmatige vijfhoekige sterren) tot regelmatige veelvlakken kunnen leiden, en construeerde de kleine en de grote sterdodekaeder.
Het duurde nog twee eeuwen voordat Poinsot (1777-1859) [2] deze serie van twee aanvulde tot de complete verzameling van vier geheel regelmatige ster-veelvlakken.
Daarna verschijnen, stuk voor stuk, de op stervorming gebaseerde halfregelmatige lichamen. Telkens worden er weer een paar ‘ontdekt’, waarbij onder andere de namen Pitsch [3], Brueckner [4] en Hess [5] geregeld voorkomen (allen eind 19e eeuw).
Coxeter [6] maakte een diepgaande mathematische analyse van de diverse veelvlakken en tevens van de uitbreiding naar hogere dimensies.
Ten slotte: het fotoboek van Wenninger [7] geeft een summiere analyse en een briljant overzicht van een groot aantal veelvlakken. Bovendien bevat dit boek uitvoerige aanwijzingen om de veelvlakken zelf te plakken.

1.3. Wat zijn veelvlakken?

Veelvlakken zijn afgesloten delen van de ruimte, die begrensd worden door vlakke veelhoeken, zoals de kubus, die begrensd wordt door zes vierkanten. Bij het bekijken van veelvlakken zullen we dus eerst de aandacht moeten richten op de zijvlakken. Maar ook de hoekpunten zijn van belang; hierin komen namelijk een aantal zijvlakken (minstens drie) bijeen in een bepaalde rangschikking, en tevens een aantal ribben (ook drie of meer). De zijvlakken zijn veelhoeken, de hoekpunten vormen veelvlakshoeken; elk van deze is gekarakteriseerd door: al dan niet regelmatigheid, aantal ribben etc. Om iets van veelvlakken te begrijpen zullen we dus eerst zowel de zijvlakken als de opbouw van de hoekpunten moeten bezien.

1.4. Veelhoeken

Een veelhoek is een vlakke figuur, begrensd door een gesloten keten van een aantal lijnsegmenten (de zijden) A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4,…, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1, die opvolgende paren van n punten A_1, A_2,…, A_n (de hoekpunten) verbinden (figuur 1.1). Voorlopig beschouwen we veelhoeken waarvan de zijden elkaar niet snijden.
Een veelhoek noemen we gelijkzijdig als alle zijden gelijk zijn, en gelijkhoekig als de hoeken gelijk zijn. Zijn veelvlakken zowel gelijkzijdig als gelijkhoekig dan heten ze

2

Volledige regelmaat (Platonische lichamen)

2.1. Algemeen

Een veelvlak wordt regelmatig genoemd als zowel de zijvlakken als de veelvlakshoeken regelmatig en identiek zijn. Dit betekent dat de zijvlakken drie vormen kunnen hebben: {3}, {4} of {5}. {6} en hoger is niet mogelijk, want reeds bij samentreffen van drie regelmatige zeshoeken wordt een plat vlak gevormd. Kennelijk moet de som van de hoeken die in een hoekpunt samenkomen kleiner dan 360° zijn.
Met deze voorwaarde in het oog kunnen we vijf mogelijkheden bedenken, namelijk per hoekpunt respectievelijk 3 of 4 of 5 driehoeken, 3 vierkanten of 3 vijfhoeken. Elk van deze combinaties kan in principe een regelmatig veelvlak vormen; of deze mogelijkheden ook werkelijk bestaan en hoe ze er uit zien moet nog uitgezocht worden.
Dat kan op de volgende manier: Denken we ons een veelvlak in (alweer met H hoekpunten, Z zijvlakken en R ribben), waarin op ieder hoekpunt m n-hoeken samenkomen, dan is het aantal vlakke hoeken gelijk aan $Z \times n$, maar ook gelijk aan $H \times m$. Hiermee zijn tevens de ribben geteld, doch dubbel, want elke ribbe maakt deel uit van twee vlakke hoeken. Dus:

$$Z \cdot n = H \cdot m = 2 \cdot R \qquad (2.1)$$

Voegen we bij deze twee relaties als derde de stelling van Euler:

$$Z + H = R + 2$$

dan kunnen voor bekende n en m de waarden van Z, H en R worden opgelost. Het resultaat is

$$Z = \frac{2 \cdot m}{n + m - nm/2} \qquad H = \frac{2 \cdot n}{n + m - nm/2} \qquad R = \frac{n \cdot m}{n + m - nm/2} \qquad (2.2)$$

Uit deze relaties blijkt allereerst dat $n + m - nm/2$ positief moet zijn. Dit is niets anders dan de reeds genoemde voorwaarde dat de som der hoeken per hoekpunt niet groter mag zijn dan 360°. De som van de hoeken in een n-hoek is namelijk $(n - 2) \cdot 180°$, zodat de voorwaarde wordt: $(m/n) \cdot (n - 2) \cdot 180° < 360°$ of: