DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

220 voorbeelden en opgaven met oplossingen – beknopte theorie

DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

220 voorbeelden en opgaven met oplossingen – beknopte theorie

A. Schuitman

VSSD

Eerste druk 1983
Derde druk 1988, reprint 2008

Uitgegeven door:
VSSD
Leeghwaterstraat 42, 2628 CA Delft, The Netherlands
tel. + 31 15 2782124, telefax +31 15 2787585, e-mail: hlf@vssd.nl
internet: http://www.vssd.nl/hlf
URL over dit boek: http://www.vssd.nl/hlf/wiskunde.html

ISBN-10 90-6562-026-5
ISBN-13 978-90-6562-026-2

NUR 919
Trefwoord: differentiaalrekening

VOORWOORD

Dit boekje behandelt enkele veel gebruikte technieken voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen. Het is bedoeld als vraagstukkenverzameling naast een college of een leerboek. De meeste vraagstukken zijn voorzien van min of meer uitgebreide uitwerkingen. De inrichting is zo gekozen dat een student die voor een tentamen zit, bij het doorwerken in een gecomprimeerde vorm informatie krijgt over de belangrijkste dingen die hij weten moet. Elk hoofdstuk bevat daartoe wat algemene opmerkingen over het betreffende onderwerp en één of meer uitvoerig uitgewerkte voorbeelden. Als er weinig tijd is om te repeteren zal er niet veel anders opzitten dan de algemene tekst te lezen en de voorbeelden globaal door te werken. Veel effectiever is natuurlijk het uitwerken van de opgaven. Voor iemand met weinig ervaring is het daarbij belangrijk om bij de aanpak van een eerste vraagstuk steeds een bijbehorend voorbeeld te raadplegen en te proberen wat daar is gedaan na te doen. Men leert dan vrij snel aanvoelen waar de moeilijkheden zitten en vaak blijkt dat een tweede vraagstuk daarna al veel gemakkelijker is op te lossen. Het is verder zaak om bij het vergelijken van de verkregen oplossingen met de oplossingen achterin een intelligente en waakzame opstelling te kiezen. In de eerste plaats kunnen antwoorden soms op verschillende manieren worden gegeven, in de tweede plaats is geen antwoordenboek ooit zonder fouten.

Dat brengt me op het volgende: de gebruikers van dit boekje zal ik zeer erkentelijk zijn als ze mij op geconstateerde fouten willen wijzen. De vele studenten die mij wezen op fouten en tekortkomingen in de beide eerder via de VSSD verschenen uitgaven, inmiddels uitverkocht, ben ik daarvoor eveneens erkentelijk. Hun opmerkingen heb ik verwerkt bij die stukken uit die deeltjes die hier weer verschijnen.

De inzet waarmede medewerkers van de VSSD het zetwerk en wat daarmee samenhangt hebben verzorgd en het geduld dat daarbij ten opzichte van de auteur is opgebracht, verdienen een woord van lof.

Delft, juli 1983 A. Schuitman

Bij de tweede druk

Vergeleken met de eerste druk bevat dit boekje wat meer algemene informatie en verklarende tekst. Het is daardoor wat dikker geworden. Een paar vraagstukken zijn vervangen door andere.
Opmerkingen van gebruikers van de eerste druk heb ik verwerkt.
De inhoud van de drie alinea's van het voorwoord bij de eerste druk is ook bij deze druk van toepssing.

Delft, november 1987 A. Schuitman

INHOUD

1. Scheiding van de variabelen

1.1. Een differentiaalvergelijking die de vorm $y' = f(x)\,g(y)$ heeft kan als volgt worden opgelost. Stel dat $y(x)$ een oplossing is. Substitueren in de gegeven vergelijking geeft

$$y'(x) = f(x)\,g(y(x)).$$

Daaruit volgt

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int f(x)\,dx$$

en met de substitutieregel:

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx. \qquad (*)$$

De voorwaarden waaronder dit geldt moeten van geval tot geval nauwkeurig worden bekeken.
Men zegt dat in (*) de variabelen zijn gescheiden. Integratie van (*) geeft de algemene oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking.
Het beginwaardeprobleem

$$y' = f(x)\,g(y),\; y(x_0) = y_0$$

lost men op soortgelijke manier op:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(u)}\,du = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

geeft de gevraagde oplossing.

1.2. *Voorbeeld*

$$\boxed{(x + 1)\frac{dy}{dx} = xy, \quad x > 0} \qquad (1)$$

Oplossing. In differentiaalvorm luidt de vergelijking

$$(x + 1)dy = xydx.$$

Scheiden geeft

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x + 1}\,dx, \quad y \neq 0.$$

Integreren (primitiveren):

$$\int \frac{dy}{y} = \int (1 - \frac{1}{x + 1})dx,$$

$$\ln|y| = x - \ln(x + 1) + \ln A, \quad A > 0.$$

Daaruit komt te voorschijn

$$|y| = \frac{Ae^x}{x+1}.$$

Voor elke $A > 0$ staan hier twee oplossingen, namelijk

$$y = \frac{Ae^x}{x+1} \quad \text{en} \quad y = -\frac{Ae^x}{x+1}.$$

Door invullen in de gegeven vergelijking blijkt bovendien dat $y = 0$ een oplossing is.
Samenvattend:

$$y = \frac{Ce^x}{x+1}, \quad C \in \mathbb{R}$$

is de algemene oplossing.

Opmerkingen.

1. Om na te gaan of een bepaalde functie een oplossing is, altijd invullen in de gegeven vergelijking en niet in de één of andere herleide vorm!
2. Als de vergelijking in differentiaalvorm is gegeven,

$$(x+1)dy - xydx = 0,$$

is niet duidelijk of y als functie van x moet worden geïnterpreteerd of omgekeerd. Men onderneemt in zo'n geval meestal geen pogingen om y (of x) expliciet te schrijven en noteert als algemene oplossing

$$xy + y - Ce^x = 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Overigens is het lang niet altijd mogelijk zo'n expliciete vorm te verkrijgen.

1.3. *Opgaven.*

$$(1 + x^2)y' + xy = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{1-y}}, \quad 0 \leqslant y < 1 \tag{3}$$

$$e^{-y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 1 \tag{4}$$

$$(1 + x)y + (1 - y)x\frac{dy}{dx} = 0, \quad x > 0,\ y > 0 \tag{5}$$

$$y - xy' = 1 + x^2y', \quad x > 0,\ y \leqslant 1 \tag{6}$$

$$2y(x + 1)\frac{dy}{dx} = x, \quad x > 0,\ y > 0 \tag{7}$$

$\sqrt{1 - x^2}\, y' = 2\sqrt{y}$ Bepaal alle oplossingen die op $(-1,1)$ zijn gedefinieerd. (8)

1.4. *Voorbeeld.* Beginwaardenprobleem.

$$\boxed{x^2 y\frac{dy}{dx} - \pi x \sin x - \pi \cos x = 0, \quad y(\tfrac{\pi}{3}) = 1} \tag{9}$$

Oplossing. Scheiden geeft

$$y\,dy = \pi\left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2}\right)dx.$$

Integreren we het linkerlid over $[1,y]$ en het rechterlid over $[\frac{\pi}{3},x]$ dan ontstaat de oplossing die aan de gegeven beginwaarden voldoet:

$$\int_1^y u\,du = \pi\int_{\frac{1}{3}\pi}^{x}\left(\frac{\sin t}{t} + \frac{\cos t}{t^2}\right)dt.$$

Uitwerken geeft ($\int \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ partieel):

$$y^2 - 1 = -2\pi\frac{\cos x}{x} + 3,$$

waaruit we weer halen

$$y = \left(4 - 2\pi\frac{\cos x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Let op: **niet** $y = -\left(4 - 2\pi\frac{\cos x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$. Deze laatste voldoet niet aan de beginwaarden.

Advies: altijd door invullen controleren of de gevonden oplossing voldoet aan de gegeven beginwaarden.

1.5. *Opgaven.*

$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + x(y - a) = 0$ a is een positieve constante. (10)

Bepaal op het interval $(-1,1)$ de oplossing waarvoor $y(0) = 0$.

$1 + \cos^2 x \cos^2 y\,\frac{dy}{dx} = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$ (11)

Bepaal de oplossingskromme door $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$

$yy' = e^{x+y}\sin x, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 0$ (12)

2. Lineaire differentiaalvergelijkingen (eerste orde)

2.1. Een differentiaalvergelijking van de vorm

$$f(x)\,y' + g(x)\,y = h(x) \qquad (*)$$

heet lineair en van de eerste orde (hij is lineair in y′ en y van de eerste graad). Als men h(x) door de constante functie 0 vervangt, krijgt men de gereduceerde vergelijking (die ook wel de bijbehorende homogene vergelijking wordt genoemd):

$$f(x)\,y' + g(x)\,y = 0. \qquad (**)$$

Als $y_0(x)$ en $y_1(x)$ oplossingen zijn van respectievelijk (*) en (**), dan is $y_0 + y_1$ een oplossing van (*), zoals door invullen blijkt.
Als $y_0(x)$ en $\tilde{y}_0(x)$ beide oplosingen zijn van (*), dan is $y_0 - \tilde{y}_0$ een oplossing van (**).
Daaruit concludeert men dan na enig denkwerk:

> de algemene oplossing van (*) ontstaat als 'som' van de algemene oplossing van (**) en een oplossing $y_p(x)$ van (*).

Deze laatste oplossing y_p noemt men een particuliere oplossing van (*).
In de praktijk lost men (*) altijd op met één van de beide onderstaande methoden of met de methode van 4.8.

Methode I

1. Bepaal met de methode van het scheiden van de variabelen de algemene oplossing van de bijbehorende homogene (de gereduceerde) vergelijking:

$$f(x)y' + g(x)y = 0.$$

2. Bepaal een particuliere oplossing van de gegeven vergelijking.
3. De gevraagde oplossing is de 'som' van de beide gevonden oplossingen.

Methode II

1. Stel: $y = u(x)v(x)$; dan is $y' = u'v + uv'$ en invullen in de vergelijking geeft

$$fvu' + (fv' + gv)u = h.$$

2. Bepaal een v(x) zodanig, dat $fv' + gv = 0$. (Dit kan met scheiden van de variabelen.)
3. Bepaal u(x) uit $fvu' = h$.
4. Vergeet niet om de gevonden functies samen te stellen tot de gevraagde oplossing.

Merk op dat de in punt 2 genoemde vergelijking in feite de gereduceerde vergelijking is, zij het met een andere variabele.

2.2. *Voorbeelden.*

$$\boxed{xy' + y = 3x^2, \qquad x > 0} \qquad (13)$$

Oplossing: De bijbehorende homogene vergelijking is

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

De algemene oplossing is $y = C/x$, $C \in \mathbb{R}$. Een particuliere oplossing is $y = x^2$, zoals door invullen direct is na te gaan. De algemene oplossing van de gegeven vergelijking is dus

$$y = \frac{C}{x} + x^2.$$

$$\boxed{y' + y = 2\sin x} \tag{14}$$

Oplossing. Stel: $y = uv$, $y' = u'v + uv'$. Dit ingevuld in de gegeven vergelijking geeft

$$u'v + u(v' + v) = 2\sin x.$$

We zoeken een functie v waarvoor $v' + v = 0$. Scheiden en integreren geeft

$$v = Ae^{-x}.$$

Aangezien we met één functie v tevreden zijn, nemen we $A = 1$. De vergelijking wordt nu gereduceerd tot

$$u'e^{-x} = 2\sin x,$$

$$u(x) = 2\int e^x \sin x \, dx = e^x(\sin x - \cos x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

De algemene oplossing luidt

$$y = uv = \sin x - \cos x + Ce^{-x}.$$

2.3. *Bepaling particuliere oplossing.*

1. Door raden en proberen. Men kijkt daarbij in eerste instantie naar het rechterlid van de gegeven vergelijking.
2. Met variatie van de constante (zie voorbeeld 15).

2.4. *Voorbeeld*

$$\boxed{x\frac{dy}{dx} + 2y = x^3, \qquad x > 0} \tag{15}$$

Oplossing. De algemene oplossing van de bijbehorende homogene vergelijking is

$$y = \frac{C}{x^2}.$$

We vervangen de constante C in deze oplossing door c(x), die we nu zo bepalen dat

$$y = c(x) \cdot x^{-2} \tag{$*$}$$

een oplossing van de gegeven vergelijking is. Uit (∗) volgt $y' = c'(x) \cdot x^{-2} - 2c(x) \cdot x^{-3}$. Ingevuld in de vergelijking geeft dat

$$xc'\frac{1}{x^2} - \frac{2c}{x^2} + \frac{2c}{x^2} = x^3.$$

Hieruit berekenen we $c'(x) = x^4$, $c(x) = \frac{1}{5}x^5$, waarbij we geen integratieconstante vermelden omdat we aan één oplossing c(x) genoeg hebben. Uit (∗) volgt nu de particuliere oplossing

$$y = \tfrac{1}{5}x^3,$$

en de algemene oplossing is

$$y(x) = \frac{C}{x^2} + \tfrac{1}{5}x^3.$$

2.5. *Veel gemaakte fout*

Variatie van de constante: nadat c(x) gevonden is, wordt die c(x) zelf aangezien voor een particuliere oplossing.

2.6. *Opgaven*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1 + x^2}y = \frac{1}{x(1 + x^2)}, \qquad x > 0 \tag{16}$$

$$(x^2 + 2x - 1)y' - (x + 1)y = x - 1, \qquad x > 1 \tag{17}$$

$$(x + x^2)y' + y = 1, \qquad -1 < x < 0,\ y(-\tfrac{1}{2}) = 2 \tag{18}$$

$$\sin x \cos x \frac{dy}{dx} - y = -\sin^3 x, \qquad 0 < x < \tfrac{1}{2}\pi \tag{19}$$

$$y' - \frac{ny}{x + 1} = e^x(n + 1)^n, \qquad x > -1,\ n \in \mathbb{N} \tag{20}$$

$$(x \ln x)y' - y = x^3(3 \ln x - 1), \qquad x \geqslant 1,\ y(1) = 1 \tag{21}$$

$$(x \sin y + \sin 2y)y' = 1, \qquad y(2) = \pi/2 \tag{22}$$

3. Differentiaalvergelijkingen van Bernoulli

3.1. Een differentiaalvergelijking van de vorm

$$f(x)\,y' + g(x)\,y = h(x)\,y^n, \quad n \in \mathbb{R}$$

draagt de naam van Bernoulli. Voor $n = 0$ of $n = 1$ is het een vergelijking van een reeds bekend type. Voor andere waarden van n herleidt men de vergelijking als volgt tot een lineaire vergelijking. Schrijf ($y \neq 0$ voor de zekerheid)

$$f(x)\frac{y'}{y^n} + g(x)\frac{1}{y^{n-1}} = h(x) \qquad (*)$$

en stel $z = y^{1-n}$. Dat geeft $z' = (1-n)y^{-n}y'$ en (*) gaat over in

$$\frac{f(x)}{1-n}z' + g(x)\,z = h(x).$$

Na oplossen van $z(x)$ substitueert men $y = z^{1/(1-n)}$ en gaat na of $y = 0$ een oplossing is door naar de gegeven vergelijking te kijken.

Opmerkingen.
1. Men kan in de gegeven vergelijking ook substitueren $y(x) = u(x)\,v(x)$ en verder werken op een manier zoals in 2.1 is aangegeven.
2. y^n is voor $n \in \mathbb{R}$ gedefinieerd voor $y \geq 0$. Kijk dus naar positieve oplossingen. Echter, voor bijvoorbeeld n geheel, kunnen er ook negatieve oplossingen komen.

3.2. *Voorbeeld*

$$\boxed{xy' + y = y^2 \ln x, \qquad x > 1} \qquad (23)$$

Oplossing. We schrijven de vergelijking als

$$x\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = \ln x, \qquad y \neq 0.$$

Door de substitutie $z = 1/y$, $z' = -y'/y^2$, komt er

$$-z'x + z = \ln x. \qquad (*)$$

De algemene oplossing hiervan is

$$z = Cx + \ln x + 1, \qquad x > 1, \ C \in \mathbb{R}.$$

De oplossingen van de gegeven vergelijking zijn

$$y = (Cx + \ln x + 1)^{-1}. \qquad (\ddagger)$$

Bovendien is $y = 0$ een oplossing zoals blijkt door in de gegeven vergelijking $y = 0$ te substitueren.
Door voor $x > 1$ de grafieken te tekenen van de functies $x \to Cx$ en $x \to 1 + \ln x$ zien we dat voor $C \geq 0$ een positieve oplossing gegeven wordt op $(1,\infty)$ en voor $C \leq -1$ een negatieve oplossing op $(1,\infty)$. Voor $-1 < C < 0$ heeft $Cx + \ln x + 1$ een nulpunt op $(1,\infty)$ en $1/(Cx + \ln x + 1)$ dus een asymptoot. In dat punt bestaat y' niet en in die zin is er dus