INHOUD

3. Limieten en continuïteit

3.1. *(3-8-82, Inf)*

Bewijs met de definitie van limiet dat $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+2}{2x+1} = 2$.

3.2. *(28-10-83, CT, Mk)*

a. Bereken $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{-x}-1)(1-\cos x)}{\tan^3 x}$.

b. Bewijs: voor elke $a \in \mathbb{R}$ bestaat $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{ax}-1)(1-\cos x)}{\tan^3 x}$.

3.3. *(28-10-83, CT, Mk)*

Bereken $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)\ln(1+x)}{1-\cos 2x}$.

3.4. *(25-10-83, LR)*

Bereken $\lim\limits_{x\to 0} (1-x)^{\frac{x}{1-\cos x}}$.

3.5. *(25-10-83, Mb)*

Bereken $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1-x}$.

3.6. *(29-10-82, Inf)*

Bereken $\lim\limits_{x\uparrow 0} (1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}}$.

3.7. *(17-6-83, LR, Mb)*

Onderzoek of de volgende limiet bestaat, en zo ja, bereken die limiet:

$\lim\limits_{x\to 0} \left(2\arctan\frac{1}{x} - \frac{\pi}{x}\sqrt{x\sin x}\right)$.

3.8. *(5-1-82, Wb, MT, LR)*

Van de functie $f\colon (-1, \frac{1}{2}\pi) \to \mathbb{R}$ is gegeven:

$f(x) = e^{\tan x} + e^{-\cot x^2}$ voor $0 < x < \frac{1}{2}\pi$,

$f(x) = \frac{1}{x}(-\tan x + p\arcsin x)$, $p \in \mathbb{R}$, voor $-1 < x < 0$,

$f(x)$ is continu in 0.

Bereken $f(0)$ en p.

3.9. *(26-10-82, Wb, MT, Ge)*

De functie $f\colon (-1,1)\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ heeft als voorschrift:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x^2)}{(e^{2x}-1)\sin x\sqrt{3}} & \text{als } 0 < x < 1, \\[2ex] \dfrac{\sqrt{1+2\cos x} - \sqrt{3\cos x}}{\sqrt{ax^2+b} - 2\sqrt{x^2+1}} & \text{als } -1 < x < 0. \end{cases}$$

Ga na of er een $a,b \in \mathbb{R}$ bestaan, zó, dat f continu te definiëren is in $x = 0$.

3.10. *(25-10-83, Wb, MT, Ge)*

De functie $f: (\frac{1}{2},\infty) \to \mathbb{R}$ heeft als voorschrift:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{\sin^2(x-1)}}{\ln(x+a)} & \text{als } \frac{1}{2} < x < 1, \\[2ex] \dfrac{x^2+bx+a}{x-1} & \text{als } 1 < x \quad \text{met } a \in [-\frac{1}{2},\infty) \text{ en } b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ga na voor welk(e) pa(a)r(en) (a,b) f continu te maken is in $x = 1$ en definieer dan $f(1)$.

3.11. *(16-8-83, Wi)*

a. Geef de definitie van: f is rechtscontinu in a, $a \in \mathbb{R}$.

b. Bewijs met behulp van deze definitie dat $f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ met $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$, $a > 0$, rechtscontinu is in a.

3.12. *(29-3-83, Wi)*

Als $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 2$ en $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, bewijs dan met behulp van de limietdefinities dat $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

3.13. *(24-1-83, Wi)*

De rij (a_n) is gegeven door: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 4}{3}$, $n \in \mathbb{N}$.

a. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: $1 \leqslant a_n < 4$.

b. Bewijs dat de rij (a_n) strikt stijgend is.

c. Bewijs dat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ bestaat.

d. Bepaal $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

3.14. *(29-10-82, Inf)*

De reële rij (a_n) is stijgend en convergent met limiet L. Bewijs: Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ is $a_n \leqslant L$.

3.15. *(16-1-84, IO)*

Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{\sin\frac{1}{n}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$.

3.16. *(28-10-87, Et)*

Zij $0 < \varepsilon < 1$. Wat is de grootste $\delta > 0$ die de uitspraak

$$x \geq 0 \text{ en } |x-1| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - 1| < \varepsilon$$

waar maakt?

a. $\delta = \varepsilon^2$.

b. $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

c. $\delta = \varepsilon$.

d. $\delta = \varepsilon^3$.

3.17. *(18-1-88, TN)*

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ en g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Gegeven is $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Welke van de volgende bewerkingen is dan mogelijk *onjuist*?

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0.$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{g(x)} = \infty.$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x))^p = \infty$ voor alle $p > 0$.

d. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{(g(x))^2} = \infty.$

3.18. *(18-1-88, IO)*

$\lim\limits_{x\downarrow 0} \dfrac{\sqrt[3]{x} + 2x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x} + x\sqrt{x}}$ is:

a. 0.

b. 1.

c. 2.

d. ∞.

3.19. *(30-10-87, Mb)*

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos x)\ln(1-x^2)}{x \sin 2x}$ is gelijk aan:

a. 1.

b. $-\frac{1}{2}$.

c. -2.

d. $\frac{1}{2}$.

7. Differentiaalvergelijkingen

Bepaal de oplossingsverzameling van de volgende differentiaalvergelijkingen 7.1 t/m 7.8:

7.1. *(25-1-83, Mb)* $2x + 2xy + (x^2 + 1)y' = 0.$

7.2. *(10-8-82, Wb, LR, MT)* $y^2 + (x^2 - xy)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

7.3. *(12-8-83, ST)* $y' = \dfrac{y}{x} + \exp(-\dfrac{y}{x}),\ x \neq 0.$

7.4. *(12-4-83, Mb)* $(\dfrac{\sin 2x}{y} + x)dx + (y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2})dy = 0.$

7.5. *(12-4-83, Mb)* $(x + 1)y' - 2y = (x + 1)^4, \quad x > -1.$

7.6. *(20-6-83, Mb)* $(3y^2 + \dfrac{1}{x + y}) + (6xy + \dfrac{1}{x + y})y' = 0.$

7.7. *(27-10-83, CT)* $(2x - ye^y)\dfrac{dy}{dx} + y = 0.$

7.8. *(10-8-82, Mb)* $(x^2 - 1)y' - 2y = \ln x, \quad x > 1.$

7.9. *(16-8-83, TN)*
f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is de oplossing van de DV $y'''' - 2y''' - 2y'' - 2y' - 3y = 25e^{-2x}$, waarvoor geldt: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ bestaat, $f(0) = 4$. Bereken $f(x)$.

7.10. *(26-1-84, ST)*
Bepaal de algemene oplossing van de DV $y''' + y'' + 3y' - 5y = 8\cosh x.$

7.11. *(15-6-83, Inf)*
Bereken de oplossing van het beginwaardeprobleem $y'' - 3y' + 2y = e^x$, $y(0) = y'(0) = 1.$

7.12. *(26-6-87, Et)*
Een van de volgende differentiaalvergelijkingen is *niet* homogeen. Welke?

a. $xy' - y = x \sin \dfrac{2y}{x}.$

b. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}.$

c. $xy' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

d. $xy' = \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

7.13. *(15-6-87, IO)*
De differentiaalvergelijking $(x^2 + 2y^2) = (x^2 - y^2)y'$ is

a. separabel.

b. exact.

c. homogeen.

d. lineair.

7.14. *(29-1-87, IO)*

De differentiaalvergelijking in differentiaalvorm

$$(2y - x\,e^x)\,dx + x\,dy = 0$$

heeft de volgende integrerende factor:

a. x. b. y. c. e^x. d. $x^2 - x$.

7.15. *(1-4-87, IO)*

De algemene oplossing van $y''' - y'' - y' + y = 0$ luidt

a. $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$.

b. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x}$.

c. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3xe^x$.

d. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x}$.

3. Limieten en continuïteit

3.1. Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Als $x \neq -\frac{1}{2}$ is $\left|\frac{x^3+2}{2x+1} - 2\right| = \left|\frac{x^3-4x}{2x+1}\right| = \frac{|x||x+2||x-2|}{|2x+1|}$.
1e selectie voor δ: Neem $0 < \delta \leqslant 1$, dan is voor $0 < |x-2| < \delta \leqslant 1$ dus $-1 < x-2 < 1$, dus $1 < x < 3$, $3 < x+2 < 5$, $3 < 2x+1 < 7$. Dus $|x| < 3$, $|x+2| < 5$, $|2x+1| > 3$, zodat $\left|\frac{x^3+2}{2x+1} - 2\right| < \frac{3\cdot 5|x-2|}{3} = 5|x-2|$. Als we nu als 2e selectie voor δ nemen: $\delta \leqslant \epsilon/5$, dan geldt: Als $\delta \leqslant \min(1, \epsilon/5)$, dan $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^3+2}{2x+1} - 2\right| < \epsilon$, dat wil zeggen: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3+2}{2x+1} = 2$.

3.2.a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^{-x}-1)(1-\cos x)}{\tan^3 x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{-x} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2} \frac{x^3}{\tan^3 x}(-\frac{1}{4}) = 1\cdot 2\cdot 1(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}$.

b. Als $a = 0$, dan is $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^{ax}-1)(1-\cos x)}{\tan^3 x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{\tan^3 x} = 0$.

Als $a \neq 0$, dan is $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^{ax}-1)(1-\cos x)}{\tan^3 x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{ax} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2} \frac{x^3}{\tan^3 x} a\cdot\frac{1}{4} =$
$= 1\cdot 2\cdot 1\cdot a\cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}a$. Dus voor alle $a \in \mathbb{R}$ bestaat de limiet.

3.3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^x-1)\ln(1+x)}{1-\cos 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \frac{\ln(1+x)}{x} (\frac{x}{\sin x})^2 \frac{1}{2} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

3.4. $\lim\limits_{x\to 0} (1-x)^{\frac{x}{1-\cos x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{x}{1-\cos x}\ln(1-x)}$, en dit is wegens de continuïteit van de e-macht gelijk aan $e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln(1-x)}{1-\cos x}}$. Dus beschouw $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\ln(1-x)}{1-\cos x} = -\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}} \frac{\ln(1-x)}{-x}$
$= -\frac{4}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 \frac{\ln(1-x)}{-x} = -2$. Dus $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{x}{1-\cos x}} = e^{-2}$.

3.5. $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x+2}{x+1})^{1-x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{(1-x)\ln\frac{x+2}{x+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{(1-x)\ln(1+\frac{1}{x+1})}$, en dit is wegens de continuïteit van de e-macht gelijk aan $e^{\lim\limits_{x\to\infty}(1-x)\ln(1+\frac{1}{x+1})}$. Dus beschouw

$$\lim_{x\to\infty}(1-x)\ln(1+\frac{1}{x+1}) = \lim_{x\to\infty}(1-x)\frac{\ln(1+\frac{1}{x+1})}{\frac{1}{1+x}}\cdot\frac{1}{1+x} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{1+x}\cdot\lim_{u\downarrow 0}\frac{\ln(1+u)}{u} \quad (\text{met } u = \frac{1}{x+1}) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1}\cdot\lim_{u\downarrow 0}\frac{\ln(1+u)}{u} = -1\cdot 1 = -1.$$

Dus $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+2}{x+1})^{1-x} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

3.6. $\lim_{x\uparrow 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}} = \lim_{x\uparrow 0}\exp\left(\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right)$

$= \exp\Big(\lim_{x\uparrow 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 2x}\,\dfrac{\sin 2x}{2x}\,\dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\underbrace{\dfrac{2^2}{\underset{\uparrow}{-}\sqrt{2}}}_{\text{(omdat } x<0)} = e^{-1\cdot 1\cdot 1\cdot 2\sqrt{2}} = e^{-2\sqrt{2}}.$

3.7. $\lim_{x\downarrow 0}(2\arctan\frac{1}{x} - \frac{\pi}{x}\sqrt{x\sin x}) = \lim_{x\downarrow 0}(2\arctan\frac{1}{x} - \pi\sqrt{\frac{\sin x}{x}}) = 2\cdot\frac{\pi}{2} - \pi = 0.$

$\lim_{x\uparrow 0}(2\arctan\frac{1}{x} - \frac{\pi}{x}\sqrt{x\sin x}) = \lim_{x\uparrow 0}(2\arctan\frac{1}{x} + \pi\sqrt{\frac{\sin x}{x}}) = 2(-\frac{\pi}{2}) + \pi = 0.$

Dus $\lim_{x\to 0}(2\arctan\frac{1}{x} - \frac{\pi}{x}\sqrt{x\sin x}) = 0.$

3.8. Daar $\lim_{x\downarrow 0}\cot x^2 = \infty$, is $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0}(e^{\tan x} + e^{-\cot x^2}) = e^0 + 0 = 1.$

$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0}(-\frac{\tan x}{x} + p\,\frac{\arcsin x}{x}) = -1 + p$. Omdat f continu in 0 is, is $\lim_{x\downarrow 0} f(x) =$
$= \lim_{x\uparrow 0} f(x) = f(0)$. Dus $1 = -1 + p = f(0)$, zodat $f(0) = 1$ en $p = 2$.

3.9. $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0}\dfrac{\ln(1-x^2)}{(e^{2x}-1)\sin x\sqrt{3}} = \lim_{x\downarrow 0}\dfrac{\ln(1-x^2)}{-x^2}\cdot\dfrac{2x}{e^{2x}-1}\cdot\dfrac{x\sqrt{3}}{\sin x\sqrt{3}}\cdot\dfrac{-x^2}{2x^2\sqrt{3}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{3}}.$

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0}\frac{\sqrt{1+2\cos x}-\sqrt{3\cos x}}{\sqrt{ax^2+b}-2\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{1+2\cos x}+\sqrt{3\cos x}}{\sqrt{1+2\cos x}+\sqrt{3\cos x}}\cdot\frac{\sqrt{ax^2+b}+2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{ax^2+b}+2\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \lim_{x\uparrow 0}\frac{(1-\cos x)(\sqrt{ax^2+b}+2\sqrt{x^2+1})}{(\sqrt{1+2\cos x}+\sqrt{3\cos x})((a-4)x^2+b-4)}.$$

Als $b \neq 4$ is dus $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = 0$ en is f dus niet continu in 0. Is $b = 4$ en $a \neq 4$, dan is

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0}\frac{2\sin^2\frac{1}{2}x}{(\frac{1}{2}x)^2}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{(a-4)}\cdot\frac{\sqrt{ax^2+4}+2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{1+2\cos x}+\sqrt{3\cos x}} = \frac{1}{2(a-4)}\cdot\frac{2+2}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}$$
$$= \frac{1}{(a-4)\sqrt{3}}.$$

Als f continu is, is het noodzakelijk dat $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} f(x)$, zodat $-\dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{(a-4)\sqrt{3}}$ $\iff a = 2$. Als $a = 2$ en $b = 4$ en we definiëren $f(0) = -1/2\sqrt{3}$, dan hebben we f inderdaad continu gemaakt in 0. Als $b = a = 4$, dan bestaat $\lim_{x\uparrow 0} f(x)$ niet en is f dus niet continu in 0. *Opmerking:* Voor $a = 2$ en $b = 4$ bestaat $\sqrt{ax^2+b}$ voor $x \in (-1,0)$.

3.10. $\lim_{x\uparrow 1} f(x) = \lim_{x\uparrow 1}\dfrac{-\sqrt{\sin^2(x-1)}}{\ln(x+a)} = \lim_{x\uparrow 1}\dfrac{\sin(x-1)}{\ln(x+a)} = 0$ als $a \neq 0$. Als $a = 0$ vinden we met de substitutie $u = 1 - x$: $\lim_{x\uparrow 1}\dfrac{\sin(x-1)}{\ln x} = \lim_{u\downarrow 0}\dfrac{-\sin u}{\ln(1-u)} = \lim_{u\downarrow 0}\dfrac{\sin u}{u}\,\dfrac{-u}{\ln(1-u)} =$
$= 1$. $\lim_{x\downarrow 1} f(x) = \lim_{x\downarrow 1}\dfrac{x^2+bx+a}{x-1}$ bestaat niet als $1 + b + a \neq 0$, want dan wordt de

teller $\neq 0$ en de noemer $= 0$. Als $1 + b + a = 0$ substitueren we $a = -1 - b$ en we vinden $\lim\limits_{x \downarrow 1} \dfrac{x^2 + bx - 1 - b}{x - 1} = \lim\limits_{x \downarrow 1} \dfrac{(x-1)(x+1) + b(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \downarrow 1}(x + 1 + b) = 2 + b$.

In het geval $a = 0$, $b = -1$ is $\lim\limits_{x \uparrow 1} f(x) = 1$ en $\lim\limits_{x \downarrow 1} f(x) = 1$, zodat bij definitie $f(1) = 1$, de functie continu gemaakt is in 1. In het geval $a \neq 0$ is $\lim\limits_{x \uparrow 1} f(x) = 0$ en $\lim\limits_{x \downarrow 1} f(x) = 2 + b$, zodat bij definitie $f(1) = 0$ de functie continu is gemaakt in 1 als $b = -2$ en dus $a = 1$.

3.11.a. f is rechtscontinu in a ($a \in \mathbb{R}$) als er een $r > 0$ bestaat, zó, dat f gedefinieerd is op het interval $[a, a + r)$ en er bij iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zó, dat voor alle x met $a \leqslant x < a + \delta$ geldt $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

b. Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Voor $x \geqslant a > 0$ geldt $|f(x) - f(a)| = \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{x - a}\,\sqrt{x + a}$.
1[e] selectie voor δ: Neem $0 < \delta \leqslant a$, dan is $0 \leqslant x - a < a$ en dus $2a \leqslant x + a < 3a$. In dat geval is $|f(x) - f(a)| < \sqrt{x - a}\,\sqrt{3a}$. Indien we als 2[e] selectie voor δ nemen $\delta \leqslant \dfrac{\epsilon^2}{3a}$, dan is $0 \leqslant x - a < \dfrac{\epsilon^2}{3a}$, dus $\sqrt{x - a} < \dfrac{\epsilon}{\sqrt{3a}}$, zodat $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Dus als $\delta \leqslant \min(a, \frac{\epsilon^2}{3a})$, dan $0 \leqslant x - a < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$.

3.12. Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Omdat $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 2$ bestaat er bij $\epsilon_1 = 1$ een $\delta_1 > 0$, zó, dat voor alle $x \in U'_{\delta_1}(a)$ geldt $|f(x) - 2| < 1 \Longleftrightarrow -1 < f(x) - 2 < 1 \Longleftrightarrow 1 < f(x) < 3$. Omdat $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ bestaat er bij iedere $G > 0$ een $\delta_2 > 0$, zó, dat voor alle $x \in U'_{\delta_2}(a)$ geldt: $g(x) > G \Longleftrightarrow \dfrac{1}{g(x)} < \dfrac{1}{G}$. Dan is $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - 0\right| = \dfrac{f(x)}{g(x)} < \dfrac{3}{G}$, als $x \in U'_{\delta_1}(a) \cap U'_{\delta_2}(a)$.
Kiezen we dus $G \geqslant 3/\epsilon$, en een daarbij behorende δ_2, dan geldt: Als $\delta \leqslant \min(\delta_1, \delta_2)$, dan $x \in U'_\delta(a) \Longrightarrow \left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - 0\right| < \epsilon$, dat wil zeggen: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

3.13.a. Met volledige inductie. E(0) is waar want $1 \leqslant a_0 = 1 < 4$.
$E(n) \Longrightarrow E(n + 1)$. IV: $1 \leqslant a_n < 4$.

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 4}{3} \overset{IV}{<} \frac{2 \cdot 4 + 4}{3} = 4 \quad \text{en} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + 4}{3} \overset{IV}{\geqslant} \frac{2 + 4}{3} = 2 \geqslant 1.$$

b. Met volledige inductie. We moeten bewijzen dat $a_n < a_{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. E(0) is waar want $a_0 = 1 < 2 = \dfrac{2 \cdot 1 + 4}{3} = a_1$. $E(n) \Longrightarrow E(n + 1)$. IV: $a_n < a_{n+1}$.

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 4}{3} \overset{IV}{<} \frac{2a_{n+1} + 4}{3} = a_{n+2}.$$

c. De rij (a_n) is stijgend (**b**) en naar boven begrensd door 4 (**a**) en heeft dus een limiet. Zij $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$.

d. Er geldt: $\lim\limits_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2a_n + 4}{3}$, dus $L = \frac{2}{3}L + \frac{4}{3} \Longleftrightarrow L = 4$.

3.14. Neem eens aan dat $a_N > L$ voor zekere $N \in \mathbb{N}$. Kies $\epsilon > 0$ zó, dat $L + \epsilon < a_N$ (bijvoorbeeld: $\epsilon = \dfrac{a_N - L}{2}$). Omdat $a_n \to L$ is er een $M \in \mathbb{N}$ zó, dat $n > M \Longrightarrow$ $\Longrightarrow L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$. Maar voor iedere $n \geqslant N$ is $a_n \geqslant a_N > L + \epsilon$. Tegenspraak.

3.15. $\dfrac{\sqrt{\sin\frac{1}{n}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \cdot \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{\sin\frac{1}{n}}\,(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{n+1-n} = \sqrt{n\sin\frac{1}{n}}\,(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}).$

Stellen we $\frac{1}{n} = y$, dan wordt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{\sin\frac{1}{n}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim\limits_{y\downarrow 0} \sqrt{\dfrac{\sin y}{y}}\,(\sqrt{1+y}+1) = 2.$

3.16. Antwoord: c. $|\sqrt{x}-1| = \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}+1} \le |x-1| < \varepsilon$ als $|x-1| < \delta = \varepsilon$ en $x \ge 0$.
Dus $\delta = \varepsilon$ voldoet en $\varepsilon^3 < \varepsilon^2 < \varepsilon$ als $0 < \varepsilon < 1$. Dat $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ de implicatie uit de opgave niet waar maakt blijkt uit het volgende tegenvoorbeeld: $\varepsilon = 0{,}04$; $\delta = 0{,}2$; $x = 0{,}81$.
Immers: $|0{,}81 - 1| < 0{,}2 \not\Rightarrow |0{,}9 - 1| < 0{,}04$.

3.17. Antwoord: b. Beweringen a. en c. zijn juist (zie stelling 3.8.5). Ook bewering d. is juist, maar $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{g(x)}$ kan ook $-\infty$ opleveren of hoeft niet te bestaan.

3.18. Antwoord: a. $\lim\limits_{x\downarrow 0} \dfrac{\sqrt[3]{x}+2x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+x\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\downarrow 0} \dfrac{x^{1/3}+2x^{3/2}}{x^{1/4}+x^{3/2}} = \lim\limits_{x\downarrow 0} \dfrac{x^{1/12}+2x^{5/4}}{1+x^{5/4}} = 0.$

3.19. Antwoord: b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos x)\ln(1-x^2)}{x\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0} (\cos x)\, \dfrac{\ln(1-x^2)}{-x^2}\, \dfrac{2x}{\sin 2x}\, \dfrac{(-x^2)}{2x^2} = -\dfrac{1}{2}.$

7. Differentiaalvergelijkingen

7.1. Scheiding der variabelen: $\dfrac{y'}{1+y} = -\dfrac{2x}{1+x^2} \Rightarrow \int \dfrac{dy}{1+y} = -\int \dfrac{2x\,dx}{1+x^2} \Rightarrow$
$\ln|y+1| = -\ln(1+x^2) - \ln|C|,\quad C \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \Rightarrow \ln|C(1+y)(1+x^2)| = 0 \Rightarrow$
$1 + y = \dfrac{C}{1+x^2}$. $y = -1$ is ook een oplossing. Dus de algemene oplossing is
$y = -1 + \dfrac{C}{1+x^2}$, $C \in \mathbb{R}$.

7.2. Homogeen. Stel $y = ux$. $u^2x^2 + (x^2 - x^2u)(u'x + u) = 0 \Rightarrow$
$u^2 + (1-u)(u'x+u) = 0$ $(x \neq 0, u \neq 1) \Longleftrightarrow (1-u)u'x = -u$. Scheiding der variabelen levert $(\frac{1}{u} - 1)u' = -\frac{1}{x} \Rightarrow \int(\frac{1}{u} - 1)du = -\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|u| - u = -\ln|x| - \ln|C|$,
$C \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \Rightarrow \ln|Cux| = u \Rightarrow Cy = e^{y/x}$ en verder is $y = 0$ een oplossing.

7.3. Homogeen. Stel $y = ux$. $u'x + u = u + e^{-u} \Longleftrightarrow e^u u' = \frac{1}{x} \Rightarrow \int e^u du = \int\frac{dx}{x}$
$\Rightarrow e^u = \ln|x| + C \Rightarrow e^{y/x} = \ln|x| + C \Rightarrow y = x\ln(\ln|x| + C),\quad C \in \mathbb{R}$.

7.4. Stel: $P(x,y) = \dfrac{\sin 2x}{y} + x$, $Q(x,y) = y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}$. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\sin 2x}{y^2}$;
$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{-2\sin x\cos x}{y^2} = -\dfrac{\sin 2x}{y^2}$. Dus $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ en de vergelijking is exact.
Stel $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\sin 2x}{y} + x$ (*1*) en $\dfrac{\partial u}{\partial y} = y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}$ (*2*).
(*1*) $\Rightarrow u(x,y) = -\frac{1}{2}\dfrac{\cos 2x}{y} + \frac{1}{2}x^2 + \varphi(y) \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\dfrac{\cos 2x}{y^2} + \varphi'(y)$. Combinatie met (*2*) levert: $y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2} = \frac{1}{2}\dfrac{\cos 2x}{y^2} + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = y - \frac{1}{2}\frac{1}{y^2} + \frac{1}{2}\dfrac{\cos 2x}{y^2} +$
$-\frac{1}{2}\dfrac{\cos 2x}{y^2} \Rightarrow \varphi'(y) = y - \dfrac{1}{2y^2} \Rightarrow \varphi(y) = \frac{1}{2}y^2 + \dfrac{1}{2y} \Rightarrow$ de oplossing wordt
$u(x,y) = C \Rightarrow -\frac{1}{2}\dfrac{\cos 2x}{y} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \dfrac{1}{2y} = C \Rightarrow x^2 + y^2 + \dfrac{2\sin^2 x}{y} = C$.

7.5. Lineair. Gereduceerde vergelijking: $(x+1)y' - 2y = 0 \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = \dfrac{2}{x+1} \Rightarrow$
$\ln|y| = \ln(x+1)^2 + \ln|C| \Rightarrow y = C(x+1)^2$, oplossing van de gereduceerde vergelijking.
Niet-gereduceerde vergelijking: Stel $y = u(x+1)^2 \Rightarrow 2(x+1)^2u + (x+1)^3u' +$
$-2(x+1)^2u = (x+1)^4 \Rightarrow u' = x + 1 \Rightarrow u = \frac{1}{2}(x+1)^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x+1)^4$
(particuliere oplossing). De algemene oplossing wordt: $y = \frac{1}{2}(x+1)^4 + C(x+1)^2$, $C \in \mathbb{R}$.

7.6. Stel $P(x,y) = 3y^2 + \dfrac{1}{x+y}$, $Q(x,y) = 6xy + \dfrac{1}{x+y}$.
$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 6y - \dfrac{1}{(x+y)^2}$; $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 6y - \dfrac{1}{(x+y)^2}$. Dus $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ en de vergelijking is exact.
Stel $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3y^2 + \dfrac{1}{x+y}$ (*1*) en $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 6xy + \dfrac{1}{x+y}$ (*2*).
(*1*) $\Rightarrow u(x,y) = 3xy^2 + \ln|x+y| + \varphi(y) \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y} = 6xy + \dfrac{1}{x+y} + \varphi'(y)$. Combinatie

met (*2*) levert $\varphi'(y) = 0 \implies \varphi(y) = C$. De oplossing wordt:
$3xy^2 + \ln|x + y| = C, \quad C \in \mathbb{R}$.

7.7. Stel $P(x,y) = y$, $Q(x,y) = 2x - ye^y$. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2$. De vergelijking is dus niet exact. We zoeken een integrerende factor, die alleen van y afhangt: $\varphi(y)$. Dan moet voor φ gelden: $\dfrac{\partial(\varphi(y)P(x,y))}{\partial y} = \dfrac{\partial(\varphi(y)Q(x,y))}{\partial x} \iff \varphi'(y)\cdot y + \varphi(y) = 2\varphi(y) \implies$
$\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \dfrac{1}{y} \iff \ln|\varphi(y)| = \ln|y| + C$, bijvoorbeeld: $\varphi(y) = y$. Dus de vergelijking
$(2xy - y^2e^y)\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0$ is exact. Stel dus $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y^2$ (*1*), $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xy - y^2e^y$ (*2*).
(*1*) $\implies u(x,y) = xy^2 + \psi(y) \implies \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xy + \psi'(y)$. Combinatie met (*2*) levert
$\psi'(y) = -y^2e^y$. Dus $\psi(y) = -\int y^2e^y dy = -y^2e^y + 2\int ye^y dy = -y^2e^y + 2ye^y - 2\int e^y dy =$
$= -e^y(y^2 - 2y + 2) + C$. De oplossing wordt $u(x,y) = C$, dus
$xy^2 - e^y(y^2 - 2y + 2) = C, \quad C \in \mathbb{R}$.

7.8. Lineair. Gereduceerde vergelijking: $(x^2 - 1)y' - 2y = 0 \implies \dfrac{y'}{y} = \dfrac{2}{x^2 - 1} \implies$
$\implies \int \dfrac{dy}{y} = \int \dfrac{2dx}{x^2 - 1} \implies \ln|y| = \int(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{x + 1})dx \implies \ln|y| = \ln|\dfrac{x - 1}{x + 1}| + \ln|C|$
$\implies y = C\dfrac{x - 1}{x + 1}$ ($C \in \mathbb{R}$). Dit is de oplossing van de gereduceerde vergelijking.
Niet-gereduceerde vergelijking. Stel $y = u\dfrac{x - 1}{x + 1} \implies (x^2 - 1)u'\dfrac{x - 1}{x + 1} = \ln x \implies$
$\implies u' = \dfrac{\ln x}{(x - 1)^2} \implies u = \int \dfrac{\ln x}{(x - 1)^2}dx = -\int \ln x\, d\dfrac{1}{x - 1} = -\dfrac{\ln x}{x - 1} + \int \dfrac{dx}{x(x - 1)} =$
$= -\dfrac{\ln x}{x - 1} + \int(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{x})dx = -\dfrac{\ln x}{x - 1} + \ln(\dfrac{x - 1}{x}) + C$. Een particuliere oplossing van de niet-gereduceerde vergelijking is dus $y = -\dfrac{\ln x}{x + 1} + \dfrac{x - 1}{x + 1}\ln(\dfrac{x - 1}{x})$. De algemene oplossing wordt: $y = -\dfrac{\ln x}{x + 1} + \dfrac{x - 1}{x + 1}\ln(\dfrac{x - 1}{x}) + C\dfrac{x - 1}{x + 1}$, $C \in \mathbb{R}$.

7.9. Lineair van hogere orde met constante coëfficiënten. Gereduceerde vergelijking:
$y'''' - 2y''' - 2y'' - 2y' - 3y = 0$. Substitutie $y = e^{\lambda x}$ levert de karakteristieke vergelijking: $\lambda^4 - 2\lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. $\lambda = -1$ voldoet en staartdeling levert:
$\lambda^4 - 2\lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - 3) = (\lambda + 1)(\lambda - 3)(\lambda^2 + 1)$.
Dus $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_{3,4} = \pm i$. Algemene oplossing van de gereduceerde DV:
$y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + C_3\cos x + C_4\sin x$. Stel $y = ae^{-2x}$ voldoet aan de niet-gereduceerde DV: $y' = -2ae^{-2x}$, $y'' = 4ae^{-2x}$, $y''' = -8ae^{-2x}$, $y'''' = 16ae^{-2x} \implies$
$(16a + 16a - 8a + 4a - 3a)e^{-2x} = 25e^{-2x} \implies a = 1$. De algemene oplossing wordt:
$y = f(x) = e^{-2x} + C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + C_3\cos x + C_4\sin x$. $\lim_{x\to\infty} f(x)$ bestaat $\implies C_2 =$
$= C_3 = C_4 = 0$. $f(0) = 4 \implies C_1 = 3$. Dus $f(x) = e^{-2x} + 3e^{-x}$.

7.10. Lineair van hogere orde met constante coëfficiënten. Gereduceerde vergelijking:
$y''' + y'' + 3y' - 5y = 0$. Karakteristieke vergelijking: $\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 5 = 0$. $\lambda = 1$ voldoet en staartdeling levert: $\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 5 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 5)$. Dus $\lambda_1 = 1$,

$\lambda_{2,3} = -1 \pm 2i$. Algemene oplossing van de gereduceerde DV:
$y = C_1e^x + C_2e^{-x}\sin 2x + C_3e^{-x}\cos 2x$. Het rechterlid van de niet-gereduceerde DV is: $8\cosh x = 8\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 4e^x + 4e^{-x}$. We splitsen het probleem:

(1) $y_{p_1}(x)$ is een particuliere oplossing van $y''' + y'' + 3y' - 5y = 4e^x$. Stel $y_{p_1}(x) = axe^x$,
$y' = axe^x + ae^x$, $y'' = axe^x + 2ae^x$, $y''' = axe^x + 3ae^x \implies$
$(ax + 3a + ax + 2a + 3ax + 3a - 5axe^x)e^x = 4e^x \implies 8a = 4 \implies a = \frac{1}{2} \implies$
$y_{p_1}(x) = \frac{1}{2}xe^x$.

(2) $y_{p_2}(x)$ is een particuliere oplossing van $y''' + y'' + 3y' - 5y = 4e^{-x}$. Stel:
$y_{p_2}(x) = be^{-x}$, $y' = -be^{-x}$, $y'' = be^{-x}$, $y''' = -be^{-x} \implies (-b + b - 3b - 5b)e^{-x} = 4e^{-x}$
$\implies -8b = 4 \implies b = -\frac{1}{2} \implies y_{p_2}(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$. De algemene oplossing wordt:
$y = C_1e^x + C_2e^{-x}\sin 2x + C_3e^{-x}\cos 2x + \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}e^{-x}$.

7.11. Gereduceerde vergelijking: $y'' - 3y' + 2y = 0$. Karakteristieke vergelijking:
$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Algemene oplossing van gereduceerde DV:
$y = C_1e^x + C_2e^{2x}$. Stel $y_p(x) = axe^x$, $y' = axe^x + ae^x$, $y'' = axe^x + 2ae^x$. Substitutie
$\implies (ax + 2a - 3ax - 3a + 2ax)e^x = e^x \implies a = -1$. Algemene oplossing:
$y = -xe^x + C_1e^x + C_2e^{2x}$.

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 1 \implies C_1 + C_2 = 1 \\ y'(0) = 1 \implies -1 + C_1 + 2C_2 = 1 \end{array}\right\} \implies C_1 = 0,\ C_2 = 1. \text{ Dus } y = e^{2x} - xe^x.$$

7.12. Antwoord: c. Schrijven we de differentiaalvergelijkingen in de vorm $y' = F(x,y)$ dan zijn in de gevallen a, b en d de functies $F(x,y)$ homogeen van de graad 0. In geval c is $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+y^2}}$ niet homogeen van de graad 0. Dus de differentiaalvergelijking c is niet homogeen.

7.13. Antwoord: c. De differentiaalvergelijking kan geschreven worden als $y' = \dfrac{x^2+2y^2}{x^2-y^2}$, waarbij het rechterlid homogeen is van de graad 0.

7.14. Antwoord: a. Schrijven we de differentiaalvergelijking in de vorm $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, dan is $\lambda(x,y)$ een integrerende factor als

$$\frac{\partial(\lambda P)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x} \Leftrightarrow P\frac{\partial\lambda}{\partial y} - Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \lambda\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1,$$

zodat $\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{-Q} = \dfrac{1}{x}$ alleen van x afhangt. $\dfrac{\partial\lambda}{\partial y} = 0$ en $\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial x} = \dfrac{1}{x}$.

Dus $\ln|\lambda| = \ln|x| + C$ of $\lambda = C^*x$ is een integrerende factor.

7.15. Antwoord: c. De karakteristieke vergelijking van de differentiaalvergelijking is
$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda-1) - 1(\lambda-1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$.
De algemene oplossing is dus van de vorm $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3xe^x$.

Voor meer opgaven met uitgebreide uitwerkingen wordt verwezen naar:
Differentiaalvergelijkingen, 220 voorbeelden en opgave met oplossingen - beknopte theorie,
A. Schuitman, VSSD, ISBN 978-90-6562-026-2