Vraagstukken over Mechanica

verzameld door R. Roest

VSSD

Eerste druk 1986
Zesde druk 2007

Uitgegeven door:
Delft Academic Press / VSSD
Leeghwaterstraat 42, 2628 CA Delft, The Netherlands
tel. +31 15 27 82124, dap@vssd.nl
internet: http://www.vssd.nl/hlf
www.delftacademicpress.nl/c016.php

Printed in The Netherlands.

ISBN-10 90-71301-96-6
ISBN-13 978-90-71301-96-4
NUR 924
Trefw: mechanica

Voorwoord

Deze verzameling vraagstukken kan gezien worden als de opvolger van het gelijknamige vraagstukkenboekje, samengesteld door drs. A.N. Borghouts en eerder door de Delftse Uitgevers Maatschappij uitgegeven. Menig vraagstuk in deze verzameling zal de vaste gebruiker dan ook bekend voorkomen, ook al is aan de redactie hier en daar wel wat veranderd.
Daarnaast is een dankbaar gebruik gemaakt van vraagstukken die de laatste jaren aan de Afdeling Technische Natuurkunde van de TH Delft zijn bedacht ten behoeve van de diverse mechanica-tentamens. Voorts is getracht de vraagstukken in een wat handzamere volgorde te rangschikken.
Het oplossen van vraagstukken is (althans wat de mechanica betreft) nog altijd een geschikte methode om nieuw verworven kennis in te slijpen en te toetsen. Ook déze verzameling is vooral bedoeld voor eerstejaars-studenten natuurkunde, wiskunde, elektrotechniek, en scheikundige technologie.
Een woord van advies aan de studenten is hier op zijn plaats: het is beter een beperkt aantal vraagstukken uit te kiezen en deze grondig te bekijken, dan te proberen een groot aantal vluchtig door te zien. De theorie komt op de eerste plaats; de vraagstukken zijn slechts ter oefening. Het omgekeerde zou zeker onjuist zijn!
Ten slotte nodig ik alle gebruikers gaarne uit deze verzameling kritisch te bezien. Commentaar gericht aan de uitgever of aan mij, is altijd welkom. Moge dit boekje velen tot steun zijn bij de studie van de mechanica.

Voorburg, februari 1986 R. Roest

Bij de vijfde druk

De nummering zoals die voor het eerst in de vierde druk is toegepast is niet gewijzigd. Het eerste nummer van elk vraagstuk verwijst dus naar het betreffende hoofdstuk van het theorieboek.
Van sommige vraagstukken is de tekst herzien. Waar dit het geval is, is de toevoeging ‘nieuwe tekst’ vermeld.
Enkele nieuwe vraagstukken zijn toegevoegd, met name de nummers 12.10 tot en met 12.15.

Voorburg, januari 1996 R. Roest

Bij de omslag:
De baan van ISEE-3 (International Sun-Earth Explorer) tussen juni 1982 en april 1985
Deze ruimtesonde was in augustus 1978 gelanceerd voor onderzoek aan de zonnewind en de wisselwerking daarvan met de aarde. Op 10 juni 1982 bevond zij zich nabij het punt waar de aantrekkingskracht van zon en aarde elkaar opheffen. Met behulp van de aanwezige stuurraketjes werd de koers zodanig gecorrigeerd dat, beurtelings gebruik makend van de aantrekkingskracht van de aarde en van de maan, het ruimtevaartuig uiteindelijk (ten koste van bijzonder weinig brandstof) op weg was naar de komeet Giacobini-Zinner. Bij die gelegenheid werd de naam van de sonde veranderd in ICE (International Cometary Explorer).
Op 11 september 1985 schoot ICE door de gasstaart van de komeet Giacobini-Zinner en was daarmee de eerste ruimtesonde die gebruikt is voor onderzoek aan een komeet.
De cirkel in de tekening is de baan van de maan ten opzichte van de aarde, de zon staat ver links onder de tekening. Bron van de tekening is het tijdschrift *Zenit* van september 1985, uitgave Stichting De Koepel te Utrecht; het origineel was getekend door Govert Schilling.

Inhoud

Eenheden, reeksen, benaderingen

De versnelling bij vrije val aan het aardoppervlak (symbool g) wordt in alle vraagstukken (voorzover niet anders aangegeven) gelijk gesteld aan 10 m/s^2.
In alle opgaven worden uitsluitend SI-eenheden gebruikt.

Reeksen

$$\sum_0^N n = \tfrac{1}{2}\, N(N+1) \quad \text{voor } n \in \mathbb{N}.$$

$$\sum_0^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{mits } |x| < 1.$$

Taylor $\quad f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \dfrac{\Delta x}{1!}\, f'(x_0) + \dfrac{(\Delta x)^2}{2!}\, f''(x_0) + \ldots$

McLaurin $\quad f(x) = f(0) + \dfrac{x}{1!}\, f'(0) + \dfrac{x^2}{2!}\, f''(0) + \ldots$

Binomiaal-reeksontwikkeling:

$$(1+\varepsilon)^n = A + B\varepsilon + C\varepsilon^2 + \ldots$$

waarin $\quad A = \binom{n}{0} = 1,\ B = \binom{n}{1} = n,\ C = \binom{n}{2} = \tfrac{1}{2}\, n(n-1)$, i.h.a. $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

In eerste orde benadering is (voor $|x| << 1$):

$$e^x = 1 + x$$
$$\ln(1+x) = x$$
$$\sin x = x$$
$$\cos x = 1$$
$$\mathrm{tg}\, x = x$$
$$(1+x)^n = 1 + nx \quad \text{voor elke } n \in \mathbb{R}.$$

In tweede orde benadering is (voor $|x| << 1$):

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}\, x^2.$$

Het Griekse alfabet

α	Α	alfa	ν	Ν	nu
β	Β	bèta	ξ	Ξ	xi
γ	Γ	gamma	ο	Ο	o-mikron
δ	Δ	delta	π	Π	pi
ε	Ε	epsilon	ρ	Ρ	rho
ζ	Ζ	zêta	σ	Σ	sigma
η	Η	êta	τ	Τ	tau
ϑ (θ)	Θ	thêta	υ	Υ	u-psilon
ι	Ι	iota	φ (ϕ)	Φ	fi
κ	Κ	kappa	χ	Χ	chi
λ	Λ	labda	ψ	Ψ	psi
μ	Μ	mu	ω	Ω	o-mega

1 Inleiding

1.1. Voor de luchtweerstand F_w die een auto tijdens het rijden ondervindt geldt de formule: $F_w = C_w \cdot \frac{1}{2}\rho v^2 \cdot S$.
Hierin is S de oppervlakte van de grootste dwarsdoorsnede van de auto; v is zijn snelheid t.o.v. de omringende lucht; ρ is de massadichtheid van die lucht; C_w is de bekende 'C_w-waarde' die kleiner is naarmate de auto beter gestroomlijnd is. Ga na wat de dimensie is van C_w.

1.2. De viscositeit (taaiheid) van een vloeistof wordt aangeduid met het symbool η. De S.I.-eenheid voor viscositeit is: $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$.
Een heel klein bolletje (straal r) dat langzaam valt (bijvoorbeeld een mistdruppeltje in de lucht of een fietskogeltje in een met glycerol gevuld glas) ondervindt een weerstandskracht F_w die groter is naarmate η, r en/of de valsnelheid groter zijn. We schrijven daarom: $F_w = C \cdot \eta^{\alpha} \cdot r^{\beta} \cdot v^{\gamma}$ waarin C een dimensieloze constante is, terwijl de exponenten α, β, γ uiteraard ook dimensieloos zijn. Zoek, met behulp van dimensie-analyse, uit hoe groot α, β en γ zijn.

1.3. Van een punt P zijn de cartesische coördinaten: x = 3,0; y = 4,0; z = 12,0 (meter).
Bereken de bol-coördinaten r, φ, θ.

1.4. Van een punt P zijn de cilinder-coördinaten: ρ = 5,0 (m); φ = 4,0 (rad); z = 1,0 (m).
Bereken de cartesische coördinaten x en y.

2 Kinematica van puntvormige lichamen

2.1. Een puntmassa beweegt langs een rechte lijn (x-as). Zijn versnelling is: $\ddot{x} = 3 - 2t$ (m/s^2). Op tijdstip $t = 0$ passeert het deeltje de oorsprong met snelheid $\dot{x} = 4$ m/s.

a. Bereken $\dot{x}$ als functie van de tijd; schets het diagram van $\dot{x}$ tegen t.

b. Bereken x als functie van de tijd. Wat is de maximale waarde van x sinds $t = 0$?

c. Wanneer passeert het deeltje opnieuw de oorsprong?

2.2. Op een deeltje werkt langs een rechte lijn een periodieke kracht, die het de versnelling $\ddot{x} = 3 \sin(\frac{1}{2}\ \pi t)$ m/s^2 geeft. Op tijdstip $t = 0$ is $x = 0$ en $v = 0$. Bereken de plaats van het deeltje als functie van de tijd. (Voorbeeld: een elektrisch geladen deeltje tussen de platen van een condensator die op een wisselspanning is aangesloten.)

2.3. Een deeltje beweegt langs een rechte lijn (x-as). Op $t = 0$ bevindt het zich in $x = 0$ en heeft dan de snelheid $v_x = v_0 > 0$. Er werkt een vertragende kracht op die evenredig is met de snelheid, zodat $a_x = -bv_x$, waarin $b > 0$.

a. De differentiaalvergelijking (D.V.) waaraan v_x moet voldoen, luidt dus: $\frac{dv_x}{dt} + bv_x = 0$. De oplossing van deze D.V. is van de vorm $v_x = AE^{Bt}$. Bewijs dat $B = -b$ en dat $A = v_0$.

b. Bereken de plaats x als functie van de tijd t.

c. Pas na oneindig lange tijd zou de snelheid geheel nul geworden zijn. De afgelegde weg zou dan toch niet oneindig lang zijn! Bereken, hoe lang die weg zou zijn.

2.4. Een deeltje beweegt langs een rechte lijn (x-as). Op $t = 0$ bevindt het zich in $x = 0$ en heeft dan de snelheid $v_x = v_0 > 0$. Er werkt een vertragende kracht op die van de snelheid afhangt (bijvoorbeeld een wrijvingskracht); daardoor ondervindt het deeltje een versnelling $a_x = -bv_x^2$ waarin $b > 0$.

a. De differentiaalvergelijking (D.V.) waaraan v_x moet voldoen, luidt dus: $\frac{dv_x}{dt} + b{v_x}^2 = 0$. De oplossing van deze D.V. is van de vorm $v_x = \frac{A}{t + B}$. Bewijs dat $A = \frac{1}{b}$ en dat $B = \frac{1}{bv_0}$.

b. Bereken de plaats x als functie van de tijd t.

2.5. Twee auto's A en B rijden in dezelfde richting achter elkaar aan, B voorop. De snelheden zijn $\vec{v}_A$ en $\vec{v}_B$ waarbij $v_A > v_B$. Als de auto's nog op een afstand d van elkaar af zijn, gaat de bestuurder van A remmen; de remvertraging heeft de constante waarde a. Bewijs dat een botsing onvermijdelijk is indien $v_A - v_B > \sqrt{2ad}$.

2.6. Plaats B ligt ten noorden van plaats A. Een vliegtuig heeft de opdracht in rechte lijn van A naar B en weer terug te vliegen. De afstand tussen A en B is ℓ. De snelheid van het vliegtuig ten opzichte van de omringende lucht is $\vec{v}$; de windsnelheid is $\vec{v}'$.

a. Toon aan dat de benodigde tijd (voor de retourvlucht), in het geval dat de wind een westenwind is, gelijk is aan:

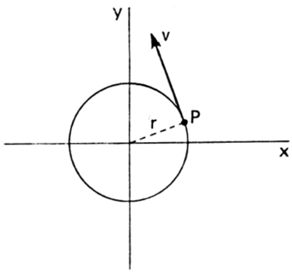
$$\frac{2\ell}{v}\left(1-\frac{v'^2}{v^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

b. Toon aan dat de benodigde tijd, in het geval dat de wind uit het noorden komt, gelijk is aan:

$$\frac{2\ell}{v}\left(1-\frac{v'^2}{v^2}\right)^{-1}.$$

c. In welk geval duurt de reis langer, bij westenwind of bij noordenwind?

2.7. Een puntmassa P voert een eenparige cirkelbeweging uit. De straal van de cirkel is r. Op tijdstip t = 0 was x = r en y = 0:



De hoeksnelheid is ω.

a. Geef x(t) en y(t) van P.

b. Geef $v_x(t)$ en $v_y(t)$ van P en ga na dat $\vec{v} \perp \vec{r}$.

c. Geef $a_x(t)$ en $a_y(t)$ van P en ga na dat $\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$.

2.8. Een vliegwiel (diameter 3 m) heeft een hoeksnelheid die gelijkmatig afneemt van 100 toeren per minuut op t = 0 tot nul op t = 4 s.

Bereken de tangentiële en de normale versnelling van een punt op de omtrek op t = 2 s.

2.9. Een deeltje beweegt langs een cirkel, ‘tegen de wijzers van de klok in’. De straal van de cirkel is 25 m.

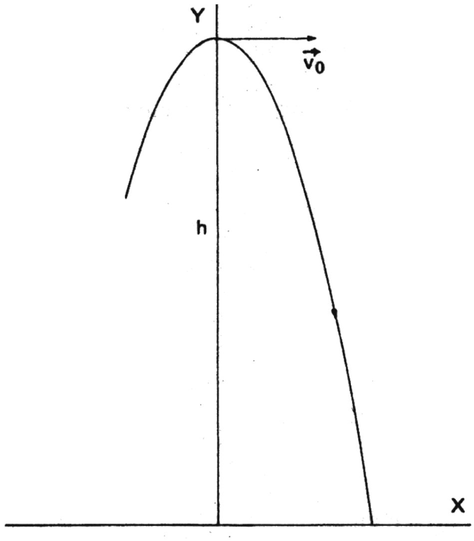
Op het tijdstip t is de lengte van de afgelegde boog ℓ vanaf een vast punt van de

cirkel: $\ell = 5t^2 - 5t$.
Bereken de snelheid, hoeksnelheid, hoekversnelling en de grootte van de versnelling op het tijdstip t = 2 s. Bereken ook de hoek tussen de versnelling en de momentane voerstraal van het deeltje op dat tijdstip.

2.10. De coördinaten van een in een plat vlak bewegende puntmassa zijn: $x = 2 \sin \omega t$ en $y = 2 \cos \omega t$. Hierin is ω een constante.

a. Wat is de baan-vergelijking?
b. Bereken de grootte van de snelheid als functie van de tijd.
c. Bereken a_{tan} en a_n als functie van de tijd.
d. Wat voor beweging is hier beschreven?

2.11. Een bal (puntmassa) wordt schuin omhoog geworpen. Verwaarloos de luchtweerstand. Het ogenblik waarop hij het hoogste punt passeert noemen we t = 0. De hoogte boven de grond is dan h = 30 m; zijn snelheid is dan v_0 = 4 m/s. In de figuur is de baan getekend en is een coördinatenstelsel aangebracht. De plaatsvector op t = 0 is in dit coördinatenstelsel:
$\vec{r}_0 = (0; 30\text{m})$, de snelheidsvector op t = 0 is $\vec{v}_0 = (4\text{ m/s}; 0)$.



a. Geef plaats- en snelheidsvector ($\vec{r}_1$ en $\vec{v}_1$) op tijdstip t = 1 s.
b. $\Delta\vec{r} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r}_1 - \vec{r}_0$; ga na welke hoek $\Delta\vec{r}$ maakt met de X-as.
c. $\Delta\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{v}_1 - \vec{v}_0$; ga na welke hoek $\Delta\vec{v}$ maakt met de X-as.
d. Bereken de grootte van de tangentiële en van de normale component van de versnelling op tijdstip t = 1 s.
e. Bereken de kromtestraal in het hoogste punt van de baan.

2.12. Een puntmassa doorloopt een vlakke baan in het XY-vlak. Voor zijn plaatsvector $\vec{r}(t)$ geldt: $\vec{r} = \{3\cos(5t); 2\sin(5t)\}$.

a. Bereken de snelheid $\vec{v}(t)$ en de versnelling $\vec{a}(t)$.

b. Het punt (0;2) ligt op de baan. Bereken de kromtestraal in dat punt.

c. De plaats van de puntmassa kan niet alleen door de rechthoekige coördinaten x en y worden aangegeven, maar eveneens door de *poolcoördinaten* r en φ. Bereken r en φ op het tijdstip t = 0,15 s.

d. Bereken de grootte van de *radiale* en de *transversale* component van de snelheid op het tijdstip t = 0,15 s.

2.13. Een boot beweegt in stromend water. Ten opzichte van het water heeft de boot een snelheid 4 km/h in noordwestelijke richting. De werkelijke snelheid (ten opzichte van de wal) is 5 km/h in westelijke richting.
Ga na, in welke richting de stroming is en hoe groot de stroomsnelheid is.

2.14. In twee ten opzichte van elkaar bewegende coördinatensystemen OXYZ en O′X′Y′Z′ zijn de eenheidsvectoren $\vec{i}$, $\vec{j}$ en $\vec{k}$ in dezelfde richting. De plaatsvector van een puntmassa is in het eerstgenoemde stelsel:

$$\vec{r} = (6t^2 - 4t)\,\vec{i} - 3t^3\,\vec{j} + 3\vec{k}$$

en ten opzichte van het andere stelsel:

$$\vec{r}\,' = (6t^2 + 3t)\,\vec{i} - 3t^3\,\vec{j} + 3\vec{k}.$$

a. Ga na, met welke snelheid O′X′Y′Z′ beweegt ten opzichte van OXYZ.

b. Toon aan dat de versnelling van de puntmassa in beide stelsels gelijk is.

3 De grondwetten van de dynamica

3.1. Astronauten in spe worden gewend aan een toestand van gewichtsloosheid in een vliegtuig waarvan op zeker ogenblik de motoren worden uitgeschakeld zodat het toestel gedurende enige tijd als een ballistisch projectiel door de atmosfeer beweegt. De luchtweerstand die het vliegtuig ondervindt is te verwaarlozen in vergelijking met de zwaartekracht.
De astronauten oriënteren zich ten opzichte van een met het vlieguig verbonden coördinatenstelsel. Is dit een inertiestelsel?

3.2. Een kunstmaan cirkelt rond de aarde. De bemanning (en alles wat zich verder in de kunstmaan bevindt) is gewichtloos.
Is een aan de kunstmaan verbonden coördinatenstelsel een inertiestelsel?