

# **Mechanica van constructies**

Elasto-statica van slanke structuren



# **Mechanica van constructies**

Elasto-statica van slanke structuren

A.L. Bouma

© VSSD

Eerste druk 1989  
Tweede druk 1993  
Derde druk 2000

Elektronische versie 2007

Uitgegeven door:

VSSD

Leeghwaterstraat 42, 2628 CA Delft, The Netherlands

tel. +31 15 2782124, telefax +31 15 2787585, e-mail: [hlf@vssd.nl](mailto:hlf@vssd.nl)

Internet: <http://www.vssd.nl/hlf>

URL over dit boek: <http://www.vssd.nl/hlf/f004.htm>

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

*All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photo-copying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.*

Gedrukte editie

ISBN-10 90-407-1278-6

ISBN-13 978-90-407-1278-4

Elektronische versie:

ISBN-10 90-6562-102-4

ISBN-13 978-90-6562-102-3

NUR 955

Trefw.: toegepaste mechanica

# Voorwoord

Dit boek is voortgekomen uit colleges voor derde-jaars studenten aan de faculteit der Civiele Techniek van de Technische Universiteit Delft. Het is dan ook in de eerste plaats bedoeld voor studenten van deze studierichting. Daarnaast is het bedoeld voor ingenieurs en ontwerpers, die in hun (bouw)praktijk met mechanicaproblemen te maken hebben en die kennis willen nemen van een methodische analyse van het gedrag van uiteenlopende constructies. Bij deze analyse is er naar gestreefd de lezer inzicht te geven in de dragende werking van constructieve systemen en de daarbij optredende karakteristieke verschijnselen, waarbij samenhang en verwantschap van problemen naar voren komen.

Graag wil ik mijn dank betuigen aan prof. dr. ir. J. Blaauwendraad, ing. H. van Koten, ir. B. Kuiper en prof. ir. H.W. Loof, die de tekst hebben doorgenomen. Hun opmerkingen en suggesties betekenden een grote stimulans.

Collega Blaauwendraad ben ik bovendien zeer erkentelijk voor de verleende faciliteiten en het verheugt mij dat het boek zal worden gebruikt als basis voor zijn colleges.

Ir. Kuiper dank ik in het bijzonder voor zijn betrokkenheid en voor het ontwerp van het vignet op de voorzijde van het boek, een symbool van constructieve samenwerking.

Mijn collega Loof ben ik bijzonder veel dank verschuldigd. Door nauwgezette lezing van de tekst heeft hij mij voor menige onzorgvuldigheid behoed en daarbij gefungeerd als mijn wetenschappelijk geweten. Zijn intensief meedenken over de materie heeft geleid tot ideeën en suggesties die op veel plaatsen hun sporen hebben achter gelaten. De gesprekken hierover waren boeiend en inspirerend en ik heb deze hogelijk gewaardeerd.

Mevrouw J.J. Verhoeks-Bok dank ik graag voor de toewijding bij het typen van een moeilijk manuscript. De heer W.H.F. Ritter ben ik veel dank verschuldigd voor de grote zorg die aan de tekeningen is besteed.

Inmiddels is een Duitse uitgave van het boek verschenen\*, waarin een aantal wijzigingen is aangebracht. Als belangrijkste wijzigingen kunnen worden genoemd de herziening van het 'riservoorbeeld' uit de offshoretechniek en de omwerking van het hoofdstuk over ringen, waarbij de Fourier-analyse nog duidelijker naar voren komt en de kinematische en constitutieve vergelijkingen in een aparte paragraaf uitvoerig worden besproken. Daarnaast is er een reeks kleinere wijzigingen

---

\* *Mechanik schlanker Tragwerke*, uitgave Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, maart 1993.

aangebracht die als verbeteringen, verduidelijkingen of aanvullingen kunnen worden aangemerkt.

In de tweede druk van de Nederlandse uitgave zijn deze wijzigingen overgenomen en zijn er nog enkele aan toegevoegd. Voor het commentaar dat ik na het verschijnen van de eerste druk mocht ontvangen en dat tot deze wijzigingen heeft bijgedragen, ben ik zeer erkentelijk.

De wijzigingen in deze derde druk zijn beperkt tot enkele kleine verbeteringen.

Rijswijk, augustus 2000

A.L. Bouma

# Inhoud

Voorwoord	5
Inleiding	11
DEEL 1. ELEMENTAIRE BELASTINGSGEVALLEN	15
1. Op rek belaste staven	17
1.1. Inleiding	17
1.2. Differentiaalvergelijkingen en oplossingen	17
1.3. Randvoorwaarden en overgangsvoorwaarden	25
1.4. Temperatuursinvloeden, krimp- en zwellingsverschijnselen	35
2. Op afschuiving belaste liggers	39
2.1. Inleiding	39
2.2. Afleiding van de differentiaalvergelijking	40
2.3. Raamwerken (skeletten)	42
2.4. Voorbeelden	46
3. Op wringing belaste staven	53
3.1. Inleiding en afleiding van de vergelijkingen	53
3.2. Dunwandige kokers	56
4. Op buiging en afschuiving belaste liggers	67
4.1. Inleiding en afleiding van de vergelijkingen	67
4.2. Overgangsvoorwaarden en randvoorwaarden	73
4.3. Toepassingen	76
4.4. Temperatuursinvloeden, alsmede krimp- en zwellingsverschijnselen	85
5. De aanvankelijk rechte kabel	92
5.1. Inleiding	92
5.2. Differentiaalvergelijking en oplossingen voor de draagkabel	92
5.3. De horizontale component $H$ van de kabelkracht	98
6. Samenvatting	100
DEEL 2. CONTINU VERDEELDE REACTIES	103
7. Verdeelde reacties die afhankelijk zijn van een verplaatsingscomponent	105
8. Op rek belaste staven waarbij een verdeelde reactiekracht optreedt	107
8.1. Uittrekproef en andere voorbeelden	107
8.2. Uitzetting van een spoorstaaf	111

9. Elastisch ondersteunde afschuifliggers	113
10. Elastisch ondersteunde kabels	118
11. Elastisch ondersteunde buigliggers	121
11.1. Inleiding	121
11.2. De differentiaalvergelijking en de beddingconstante	122
11.3. Particuliere oplossingen van de differentiaalvergelijking, Fourier-analyse	125
11.4. De oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking	129
11.5. Een geconcentreerde last op een oneindig lange ligger	131
11.6. De vier basisgevallen	140
11.7. Natuurlijke golflengte	145
11.8. Verdeelde belasting	146
11.9. Liggers met eindige lengte	154
DEEL 3. GECOMBINEERDE DRAAGWERKING	157
12. Inleiding, enkele veermodellen	159
13. De combinatie van kabelwerking en buiging, een parallelsysteem	164
13.1. De differentiaalvergelijking	164
13.2. Particuliere oplossing bij sinusvormige belasting	166
13.3. Buigliggers, belast met een trekkracht	169
13.4. De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking	171
13.5. Kabels met buigstijfheid, slanke trekstaven	174
13.6. Twee voorbeelden uit de offshore-techniek	181
14. De combinatie van een afschuifligger en een buigligger, een parallelsysteem	187
14.1. Inleiding	187
14.2. De differentiaalvergelijking en oplossingen	189
14.3. Extra verstijvingen en verende ondersteuning	193
DEEL 4. GECOMBINEERDE DRAAGWERKING MET GEKROMDE ELEMENTEN	199
15. De gekromde kabel	201
15.1. Het verband tussen de lengte van de kabel en de grootte van de horizontale kracht $H$	201
15.2. De flexibiliteit van de kabel en wijziging in de grootte van $H$	205
15.3. Horizontale verplaatsingen	208
15.4. Fourieranalyse voor het bepalen van de grootte van $H$	213
15.5. De verplaatsingen bij een additionele belasting	218
16. Hangdaken en hangbruggen	222
16.1. Inleiding	222
16.2. Hangdaken	223



16.3.	Hangbruggen, benadering met de differentiaalvergelijking voor de kabel	229
16.4.	De volledige differentiaalvergelijking bij meewerkende verstijvingsligger, Fourieranalyse	235
16.5.	Geconcentreerde belastingen, randstoringen en het gebruik van invloedslijnen	240
16.6.	Enkele secundaire effecten	246
17.	Bogen	253
17.1.	Inleiding	253
17.2.	Berekening met behulp van vormveranderingsvergelijkingen	254
17.3.	Verplaatsingen	260
17.4.	De differentiaalvergelijking van de boog, oplossingen bij kleine verplaatsingen	263
17.5.	Oplossingen van de uitgebreide differentiaalvergelijking	267
17.6.	Verschillende boogtypen	271
18.	Cirkelvormige ringen en verwante cilindrische constructies (buizen, tunnels, tanks, reservoirs, enz.)	275
18.1.	Inleiding	275
18.2.	Evenwichtsvergelijkingen voor de snedekrachten bij radiale belasting	278
18.3.	Berekening van de snedekrachten met behulp van Fourierreeksen	280
18.4.	Kinematische en constitutieve vergelijkingen, mogelijke vervormingstoestanden	287
18.5.	Berekening van de verplaatsingen met behulp van Fourierreeksen	294
18.6.	Exacte oplossingen	296
18.7.	Tangentieel gerichte belasting	303
DEEL 5.	INTERACTIE BIJ VERBINDINGEN EN KOPPELINGEN	311
19.	Verbinding van op rek belaste staven	313
a.	De als star opgevatte verbinding	313
b.	De als star-plastisch opgevatte verbinding	314
c.	De als lineair-elastisch opgevatte verbinding	314
20.	Koppeling van liggers die op buiging worden belast	324
20.1.	Inleiding	324
20.2.	Wanden bij verwaarlozing van de gemiddelde rek	326
20.3.	Wanden met inachtneming van de gemiddelde rek	331

DEEL 6. STORINGSPROBLEMEN	339
21. Randstoringsen bij cilindrische schalen en membranen	341
21.1. Het randstoringsprobleem bij cilindrische schalen, inleiding	341
21.2. Differentiaalvergelijking en veerconstante	341
21.3. Toepassingen	343
Een met ringen verstijfde buis onder inwendige overdruk	343
Reservoirs en tanks voor vloeistoffen	345
Het effect van voorspannen	346
Temperatuurspanningen	347
21.4. Het randstoringsprobleem bij een cilindrisch membraan	348
22. Wringing bij kokers met vervormbare doorsnede	352
22.1. Schranken van een doorsnede, afleiding van de differentiaalvergelijking	352
22.2. Het inleiden van een geconcentreerde belasting	360
22.3. Schranken en welven van de doorsneden met bovendien afschuiving in de wanden	366
BIJLAGEN	
A. Het gebruik van Fourierreeksen	375
Theorie en de toepassing hiervan bij belastingsfuncties	375
De Fourierreeks als oplossing van een differentiaalvergelijking	382
B. Enkele particuliere oplossingen en integralen bij de behandeling van ringen	385
C. De constitutieve vergelijkingen bij ringen	386
D. Symbolen	389
Trefwoordenlijst	392

# Inleiding

Als gevolg van steeds verder gaande eisen die aan constructies worden gesteld en het streven naar economie vindt een voortschrijdende ontwikkeling plaats die leidt tot nieuwe constructievormen en schaalvergroting. Dit alles wordt mogelijk gemaakt door het beschikbaar komen van nieuwe en steeds hoogwaardiger materialen.

Waar vroeger bij een rivierkruising een vakwerkbrug op pijlers werd ontworpen, later de rivier met een boog werd overspannen, ziet men thans de strakke lijn van ranke kokerliggers van staal of beton.

Bij hoge gebouwen is er een ontwikkeling van massieve steenmassa's via ijle skeletten van staal of beton naar torens die als dunwandige kokers kunnen worden beschouwd. Vaak zijn hierin interessante structuren verborgen, waarmee combinaties van draagwerkingen worden verkregen.

Daarnaast zijn er ontwikkelingen op geheel nieuwe gebieden, zoals de offshore-techniek, waar platforms worden gebouwd in diep water en waar het toenemend gebruik van kabels en tuien in het oog springt ("tension-structures").

De ontwikkeling naar constructies met grote spanwijdte of grote hoogte leidt vaak tot slanke constructies, waarvan de dwarsafmetingen als relatief klein kunnen worden beschouwd ten opzichte van de lengte. Natuurlijk bepalen vorm en afmetingen van de doorsnede mede het gedrag van zo'n constructie.

De slanke elementen en daarvan afgeleide constructies die in dit boek worden behandeld, worden in lengte-richting als continu beschouwd, zo nodig in gedeelten, wat bij het onderzoek naar het elasto-statisch gedrag bij belasting een analytische aanpak mogelijk maakt. Discrete systemen, die bestaan uit een groot aantal identieke subsystemen kunnen vaak als een continu systeem worden behandeld.

Het onderzoek stoelt op de fundamentele vergelijkingen voor evenwicht, geometrie en materiaalgedrag, die de "bouwstenen" vormen waarmee kennis en inzicht vanuit de basis worden opgebouwd. De lezer, student zowel als praktizerend ingenieur/ontwerper krijgt hiermee gereedschap aangereikt voor het zelf oplossen van problemen.

De analytische behandeling leidt tot gewone lineaire differentiaalvergelijkingen. De oplossing omvat in het algemeen de verplaatsingen en de krachtsverdeling (de snedekrachten) als functie van de lengtecoördinaat, waarmee het functioneren van de constructie bij belasting wordt beschreven. Vooral bij samengestelde constructies kan deze draagwerking interessante aspecten vertonen.

Daarnaast kunnen verschijnselen optreden, die als een storing van het algemene beeld kunnen worden gekarakteriseerd en die onder meer kunnen worden veroorzaakt door een discontinuïteit in de belasting of in de eigenschappen van de constructie of bijvoorbeeld door een randvoorwaarde waar een belemmering of een dwang van uitgaat. Deze storingsverschijnselen kunnen van lokale aard zijn. Zij kunnen evenwel ook de

draagwerking als geheel sterk beïnvloeden.

De oplossingen worden zoveel mogelijk bewerkt tot uitdrukkingen – menigmaal zeer eenvoudige – aan de hand waarvan het gedrag van de onderzochte constructie goed valt na te gaan.

Inzicht in dit gedrag kan dan worden verworven door het bestuderen van oplossingen, het ontdekken van samenhang tussen verschillende oplossingen en van verwantschap tussen ogenschijnlijk verschillende problemen. Bij het ontwerpen van een constructie is dit inzicht onontbeerlijk.

Ook bij de berekening van een constructie met een computerprogramma is inzicht in het gedrag van de constructie die wordt onderzocht noodzakelijk. Dit geldt zowel voor de gebruiker van een beschikbaar programma als voor degene die zelf een programma ontwikkelt. Beiden moeten de uitkomsten van de berekening controleren en evalueren op basis van inzicht in de krachtwerking. Eenvoudige formules, waarvan men de achtergrond kent, kunnen daarbij een belangrijke ondersteuning bieden. Bij het zelf ontwikkelen van een programma spelen bovendien de genoemde “bouwstenen” en analytische aanpak een grote rol.

De stof is verdeeld in zes delen (22 hoofdstukken). In deel 1 worden de elementaire belastingsgevallen behandeld, waarbij een rechte staaf of ligger achtereenvolgens op rek, afschuiving, wringing en buiging wordt belast. De doorsneden ondergaan in deze gevallen òf een translatie òf een rotatie.

Aspecten als randvoorwaarden en overgangsvoorwaarden komen aan de orde en constructietypen als een hoog raamwerk en een kokerligger worden geïntroduceerd. Bijzondere aandacht wordt gegeven aan het samengaan van afschuiving en buiging in liggers en aan temperatureffecten. Ook is plaats ingeruimd voor de kabel die in toenemende mate als constructie-element wordt gebruikt.

In deel 2 worden continu verdeelde reacties, die door een omringend of ondersteunend medium op de staaf of ligger worden uitgeoefend, geïntroduceerd, wat leidt tot een nieuwe groep van problemen. Het belangrijkste geval is de elastisch ondersteunde buigligger, die uitvoerig wordt besproken. Zowel de oplossing met behulp van Fourierreeksen als met exponentiële functies wordt behandeld. Het gedrag van een ligger bij belasting met een geconcentreerde last wordt grondig geanalyseerd. Onderwerpen als natuurlijke golflengte en het gebruik van invloedslijnen komen ter sprake. Bij het oplossen van problemen kunnen, als men zich laat leiden door fysisch-mechanisch inzicht en de methode van vrijmaken hanteert, de uitkomsten voor een viertal basisgevallen die in een tabel zijn verzameld, nuttig zijn .

In deel 3 wordt een begin gemaakt met de behandeling van combinaties van draagwerkingen. Na een inleiding over veermodellen, bedoeld om de begrippen parallelsysteem en seriesysteem, die in het vervolg een belangrijke rol spelen, nog eens duidelijk te maken, wordt het aanschouwelijke parallelsysteem van een buigligger en een rechte kabel besproken. Dit voert enerzijds tot de behandeling van buigliggers die door

een trekkracht worden belast, anderzijds tot kabels en slanke trekstaven met een zekere buigstijfheid, die men op uiteenlopende gebieden tegenkomt.

In het daarop volgende hoofdstuk wordt de samenwerking van een afschuifligger (een raamwerk) en een buigligger (een wand, een kern) behandeld, een combinatie die veel bij gebouwen wordt aangetroffen.

In deel 4 wordt begonnen met de behandeling van een gekromde kabel. De initiële kromming leidt bij kabelconstructies in beginsel tot niet-lineair gedrag bij belasting en het belangrijkste probleem is het bepalen van de grootte van de kracht in de kabel bij een additionele belasting. Hierbij biedt de Fourieranalyse uitkomst. Kabelconstructies zijn ook flexibele constructies, zodat bij wijziging van de belasting grote verplaatsingen, verticaal zowel als horizontaal, kunnen optreden. Na een korte bespreking van hangdaken wordt aan hangbruggen een uitvoerige bespreking gewijd. Bij grote overspanning domineert de dragende werking van de kabel sterk. Verschillende wijzen van benadering van het draagkrachtprobleem worden onderzocht, waarna nog een aantal specifieke aspecten, waaronder het gedrag van tuien, wordt aangestipt.

Vervolgens worden bogen besproken. Dit zijn eveneens flexibele constructies, maar de verhoudingen liggen anders. Er dreigt hier het gevaar van instabiliteit. De behandeling met differentiaalvergelijkingen maakt diverse problemen beter toegankelijk en inzichtelijk. Daarna worden ringen behandeld. Hier leidt de initiële kromming tot een stelsel gekoppelde vergelijkingen, waarmee een probleem van de zesde orde wordt beschreven. Verschillende belastingsgevallen worden veel toegankelijker als gebruik wordt gemaakt van Fourierreksen. De behandeling kan ook als een opstapje naar de theorie van schalen worden gezien. De beide kernen van deze theorie treft men hier reeds aan.

In deel 5 wordt aandacht gevraagd voor een andere groep van problemen, de verbindingen en koppelingen van staven en liggers. Hier komen we – al of niet verborgen – seriesystemen tegen. Bij de verbinding van staven door middel van flanklassen blijkt de analyse te leiden tot een stelsel simultane differentiaalvergelijkingen. Buigliggers die in lengterichting gekoppeld zijn (bijvoorbeeld hoge wanden), vertonen een gedrag dat overeenkomt met dat van de eerder behandelde combinatie van een afschuifligger en een buigligger als kan worden afgezien van de gemiddelde rek door normaalkracht in de liggers (wanden). Is dit laatste niet het geval, dan is het gedrag gecompliceerder. De elementaire draagwerkingen blijven echter herkenbaar.

In deel 6 tenslotte worden problemen behandeld die als storingsproblemen kunnen worden gekarakteriseerd. In de eerste plaats de randstoringsen die kunnen optreden bij de gebogen randen van cilindrische schalen en membranen. Voorbeelden hiervan treft men onder meer aan bij buizen, reservoirs en tanks. De storing blijft in deze gevallen beperkt tot een smalle zone nabij de rand. In het laatste hoofdstuk wordt het schranken van de rechthoekige doorsnede van een op wringing belaste kokerligger onderzocht. In eerste instantie blijkt het mogelijk dit verschijnsel te beschrijven met een vergelijking die

analoog is met die voor de elastisch ondersteunde buigligger. Het bereik van de storing kan nu echter zeer groot zijn. In de laatste paragraaf worden de drie verschijnselen wringing, schranken en welven gezamenlijk met drie simultane vergelijkingen beschreven. De storingsverschijnselen die hieruit kunnen worden afgeleid kunnen van uiteenlopend karakter zijn.

# **Deel 1**

Elementaire belastingsgevallen





# 1

## Op rek belaste staven

### 1.1. Inleiding

We beginnen de reeks van te behandelen belastingsgevallen met de prismatische staaf, die door axiale belasting op rek (extensie) wordt belast. Bij de behandeling van dit zeer eenvoudige geval zal een zekere uitvoerigheid worden betracht als voorbereiding ook op de behandeling van later te bespreken gevallen waar zich analoge situaties voordoen en waar dezelfde gedachtenlijn wordt gevolgd. De beschrijving van het gedrag met behulp van vergelijkingen valt in drie delen uitéén. In de eerste plaats zijn er evenwichts-beschouwingen, die leiden tot de voorwaarden waaraan de inwendige krachten moeten voldoen. In de tweede plaats zijn er geometrische beschouwingen, waarbij de relaties worden gedefinieerd tussen de optredende verplaatsingen en de in de beschouwde gevallen relevante vormveranderingsgrootheden. Tenslotte zijn er constitutieve vergelijkingen, die het verband leggen tussen de inwendige krachten – ook wel snedekrachten genoemd – en de daardoor veroorzaakte vormveranderingen. Uitgangspunt hierbij is de Wet van Hooke; we beperken ons daarmee tot het lineair-elastische gedrag van constructies. De verkregen vergelijkingen worden in het algemeen teruggebracht tot één enkele vergelijking, waarmee het verband wordt gegeven tussen de belasting en de daardoor veroorzaakte verplaatsing.

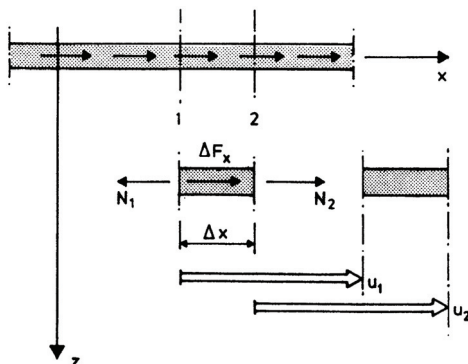
### 1.2. Differentiaalvergelijkingen en oplossingen

De op rek belaste staaf is weergegeven in figuur 1.1. De  $x$ -as van het assenstelsel wordt steeds gekozen langs de staafas die de meetkundige plaats is van de zwaartepunten van de opvolgende normale doorsneden. De staaf wordt belast door een axiale, langs de staafas verdeeld aangrijpende kracht  $F_x$ . Door deze belasting ontstaat in de staaf een normaalkracht  $N(x)$ , die als trek positief wordt gerekend. Om de relatie tussen deze snedekracht en de belasting te vinden wordt uit de staaf een klein elementje gesneden, dat eveneens in figuur 1.1 is weergegeven.

Op de linkerdoorsnede van dit elementje werkt een normaalkracht  $N_1$ , op de rechterdoorsnede een normaalkracht  $N_2$ . Het verschil van beide is  $N_2 - N_1 = \Delta N$ , waarmee een kleine toename van de normaalkracht wordt bedoeld. Het deel van de belasting dat op het elementje aangrijpt wordt met  $\Delta F_x$  aangeduid.

De evenwichtsvoorwaarde luidt nu:

$$\Delta N + \Delta F_x = 0 \quad \text{of ook, gedeeld door } \Delta x: \quad \frac{\Delta N}{\Delta x} + \frac{\Delta F_x}{\Delta x} = 0$$



Figuur 1.1.

We nemen aan dat voor beide termen de limiet voor  $\Delta x \rightarrow 0$  kan worden bepaald, zodat geldt:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta x} = 0$$

De eerste term is zoals bekend het differentiaalquotiënt  $dN/dx$ . De tweede term wordt de verdeelde belasting  $q(x)$  genoemd, die in de eenheid  $N/m$  wordt uitgedrukt. De evenwichtsvergelijking luidt dus:

$$\frac{dN}{dx} + q = 0 \quad \text{of ook:} \quad q = -\frac{dN}{dx} \quad (1.1)$$

De grootheden die hier worden beschouwd zijn in het algemeen functies van  $x$  en kunnen als zodanig worden aangeduid:  $N(x)$ ,  $q(x)$  enzovoort. Korthedshalve zal in het volgende meestal de toevoeging  $(x)$  worden weggelaten. Een enkele maal zal echter door deze toevoeging nog eens worden benadrukt dat het steeds om functies gaat.

Zoals reeds gezegd, veroorzaakt de belasting verplaatsingen. We nemen aan dat vlakke doorsneden vlak blijven en in dit geval een translatie in  $x$ -richting ondergaan. De linkerdoorsnede zal daarbij verplaatsen over een afstand  $u_1$ , de rechter doorsnede over een afstand  $u_2$  (figuur 1.1). Het verschil van beide verplaatsingen  $u_2 - u_1 = \Delta u$  is de verlenging van het elementje. We beschouwen nu het quotiënt van deze verlenging en de oorspronkelijke lengte  $\Delta x$  van het elementje:  $\Delta u/\Delta x$ . De samenhang van de materie vereist, dat als  $\Delta x$  tot nul nadert, dit ook met  $\Delta u$  het geval is. In het algemeen zal dan ook de limiet van het quotiënt bestaan. Als vormveranderingsgrootte wordt nu de rek  $\epsilon$  gedefinieerd als:

$$\epsilon(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \quad (1.2)$$

Deze relatie wordt ook wel de kinematische vergelijking genoemd, omdat op twee ogenblikken – namelijk vóór en ná het belasten – naar de staaf wordt gekeken.

Er rest thans nog het verband tussen de normaalkracht  $N$  en de hierdoor veroorzaakte rek  $\varepsilon$ . Voor de lijnspanningstoestand in het elementje kan worden uitgegaan van de wet van Hooke in zijn eenvoudigste vorm:  $\sigma = E\varepsilon$ . De rek is over de doorsnede van de staaf constant; de elasticiteitsmodulus  $E$  zal bij niet-homogene doorsneden over de doorsnede variëren. In dat geval zal ook de normaalspanning  $\sigma$  over de doorsnede niet constant zijn. De normaalkracht op een infinitesimaal klein oppervlakje  $dA$  is  $dN = \sigma dA$  en de normaalkracht in de staaf wordt gevonden met de integraal over de oppervlakte  $A$  van de staafdoorsnede:

$$N = \iint_A \sigma dA = \varepsilon \iint_A E dA$$

Voor een homogene doorsnede waarvoor  $E$  constant is, volgt:

$$N = EA\varepsilon \quad (1.3)$$

Het produkt  $EA$  wordt stijfheidsfactor voor extensie of rekstijfheid genoemd en de snedekracht  $N$  is dus gelijk aan de rek  $\varepsilon$ , vermenigvuldigd met deze stijfheidsfactor. In het algemene geval van niet-homogene doorsneden kan  $EA$  worden opgevat als een tweelettersymbool voor de rekstijfheid, die dan gedefinieerd is als:

$$EA = \iint_A E dA \quad (1.4)$$

of – bij een eindig aantal samenstellende delen – als de som van de rekstijfheden van de samenstellende delen van de doorsnede.

De gemaakte onderstelling dat de doorsneden uitsluitend een translatie in  $x$ -richting ondergaan vereist dat de normaalkracht  $N$  gaat door het zwaartepunt of – moderner gezegd – door het normaalkrachtcentrum van de doorsneden.

Het drietal vergelijkingen (1.1), (1.2) en (1.3) beschrijft volledig het gedrag van de op rek belaste staaf. Zij kunnen worden beschouwd als veldvergelijkingen, die gelden in een interval  $0 < x < l$ . De vergelijkingen (1.1) en (1.2) zijn differentiaalvergelijkingen van de eerste orde; vergelijking (1.3) is een algebraïsche vergelijking.

In het algemeen zal de belasting  $q$  gegeven zijn en moeten de normaalkracht  $N$  en de verplaatsing  $u$  worden bepaald. Dit is dan een zogenaamd tweede orde probleem.

De drie vergelijkingen kunnen worden vervangen door één enkele differentiaalvergelijking. Daartoe wordt vergelijking (1.2) in vergelijking (1.3) gesubstitueerd, wat leidt tot de volgende relatie tussen de verplaatsing  $u$  en de snedekracht  $N$ :

$$N = EA \frac{du}{dx} \quad (1.5)$$

Differentiëren van deze vergelijking geeft bij een prismatische staaf, waarvoor  $EA$  constant is:

$$\frac{dN}{dx} = EA \frac{d^2u}{dx^2}$$

Substitutie hiervan in (1.1) leidt tot de differentiaalvergelijking van de tweede orde, die het verband geeft tussen de belasting  $q$  en de daardoor veroorzaakte verplaatsing  $u$ :

$$q = -EA \frac{d^2u}{dx^2} \quad (1.6)$$

In concreto moet deze vergelijking worden opgelost met gebruikmaking van de randvoorwaarden en eventueel aanwezige overgangsvoorwaarden. Voor het verkrijgen van oplossingen kan evenwel ook worden uitgegaan van het stelsel (1.1) t/m (1.3), of – als tussenweg – van de vergelijkingen (1.1) en (1.5).

### *Enkele basisgevallen*

We willen nu voor een paar basisgevallen de oplossingen bepalen. Het betreft een aantal eenvoudige gevallen, die ook langs elementaire weg kunnen worden opgelost. Het doel is hier met name echter om de oplossingsprocedure met behulp van randvoorwaarden te tonen, mede als voorbereiding op latere problemen. We beginnen de behandeling voor het geval dat de belasting gelijkmatig verdeeld is, met andere woorden de functie  $q(x)$  is constant, wat wordt aangeduid met  $q_0$ , waarbij  $q_0$  een gegeven waarde is. Uit vergelijking (1.1) volgt dan:

$$N = -q_0x + C_1 \quad (1.7)$$

en uit vergelijking (1.5) volgt:

$$EAu = -\frac{1}{2} q_0x^2 + C_1x + C_2 \quad (1.8)$$

waarin  $C_1$  en  $C_2$  integratieconstanten zijn, die volgen uit de randvoorwaarden. Er doen zich daarbij verschillende mogelijkheden voor.

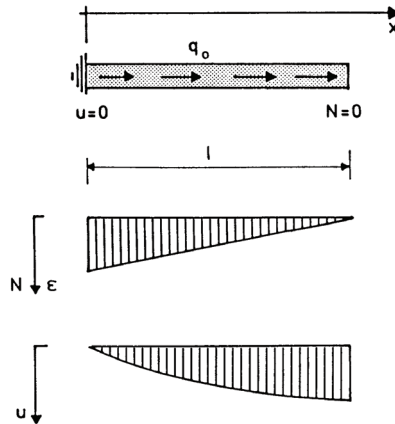
**Geval A.** We beschouwen eerst het geval van een staaf met een lengte  $l$ , die aan de linkerzijde wordt vastgehouden en aan de rechterzijde vrij is. De staaf wordt belast met een gelijkmatig verdeelde belasting (figuur 1.2). In dit geval zijn de randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} x=0: & \quad u = 0 \\ x=l: & \quad N = 0 \end{aligned}$$

Substitutie van de laatste randvoorwaarde in vergelijking (1.7) leidt tot:  $0 = -q_0l + C_1$ , waaruit voor de integratieconstante  $C_1$  volgt:  $C_1 = q_0l$ .

Voor de snedekracht  $N$  wordt dus gevonden:

$$N = q_0(l - x) \quad (1.9)$$



Figuur 1.2.

De normaalkracht  $N$  neemt lineair toe van het rechteruiteinde naar het linkeruiteinde en dit geldt ook voor de rek  $\epsilon$  (figuur 1.2).

Substitutie van de eerste randvoorwaarde in vergelijking (1.8) leidt nu tot:  $0 = 0 + 0 + C_2$ , waaruit volgt  $C_2 = 0$ .

Voor de verplaatsing  $u$  wordt dus gevonden het parabolische verloop (zie ook figuur 1.2), gegeven door:

$$EAu = -\frac{1}{2} q_0 x^2 + q_0 l x = \frac{1}{2} q_0 x(2l - x) \quad (1.10)$$

Extreme waarden zijn:

$$N_{(x=0)} = q_0 l \quad (\text{randextreem})$$

$$EAu_{(x=l)} = \frac{1}{2} q_0 l^2 \quad (\text{randextreem, tevens gewoon extreem})$$

Merk op dat  $u$  extreem is als  $N$  gelijk is aan nul.

**Geval B.** Het volgende geval betreft een staaf met lengte  $l$  die aan beide zijden wordt vastgehouden en die wederom is belast met een gelijkmatig verdeelde belasting (figuur 1.3). In dit geval zijn de randvoorwaarden:

$$x = 0: \quad u = 0$$

$$x = l: \quad u = 0$$

Substitutie van de eerste randvoorwaarde in vergelijking (1.8) leidt tot:  $C_2 = 0$ .

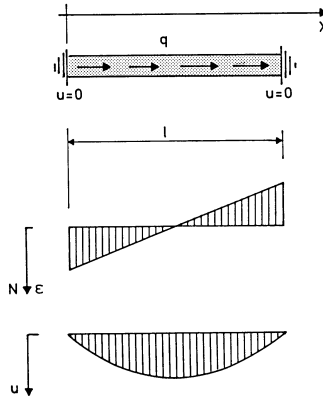
Substitutie van de tweede randvoorwaarde in vergelijking (1.8) leidt tot:  $C_1 = \frac{1}{2} q_0 l$ .

Voor de normaalkracht en de verplaatsing wordt dus respectievelijk gevonden:

$$N = -q_0 x + \frac{1}{2} q_0 l = q_0 \left( \frac{1}{2} l - x \right) \quad (1.11)$$

$$EAu = -\frac{1}{2} q_0 x^2 + \frac{1}{2} q_0 l x = \frac{1}{2} q_0 x(l-x) \tag{1.12}$$

Het verloop van N en u is weergegeven in figuur 1.3.



Figuur 1.3.

Extreme waarden zijn:

$$N_{(x=0)} = \frac{1}{2} q_0 l, \quad N_{(x=l)} = -\frac{1}{2} q_0 l \quad (\text{randextreem})$$

$$EAu_{(x=l/2)} = \frac{1}{8} q_0 l^2 \quad (\text{gewoon extreem, waar } N = 0)$$

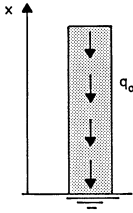
*Voorbeelden*

Een voor de hand liggend voorbeeld van geval A is de verticale prismatische homogene kolom, belast door het eigengewicht (figuur 1.4). De constante belasting  $q_0$  is gelijk aan  $-\gamma A$ , waarin:  $\gamma$  = volumiek gewicht van het materiaal ( $\gamma = \rho g$ ),  $A$  = oppervlakte van de doorsnede.

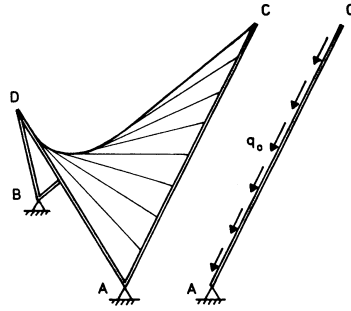
Een wat onverwachter voorbeeld vinden we bij de *randstaven van een hypparschaal* (een schaal in de vorm van een hyperbolische parabolöide) als weergegeven in figuur 1.5. Langs de rechte begrenzingen AC, AD, BC en BD van het oppervlak zijn staven van geringe doorsnede aangebracht. Deze worden door de schaal belast met een verdeelde axiale belasting zoals voor staaf AC is weergegeven. De belasting op het oppervlak wordt zo overgebracht naar de vaste steunpunten A en B.

Bij een verticale belasting op het schaaloppervlak die constant is indien hij is opgegeven als kracht op een oppervlakje gedeeld door de projectie van het oppervlakje op het horizontale vlak, is deze verdeelde belasting op de randbalken eveneens constant.

Een ander voorbeeld betreft een tonschaal, dat is een *cilindrische schaal voorzien van randstaven* aan de rechte randen (figuur 1.6), die veel wordt gebruikt voor de overdekking van industriehallen.



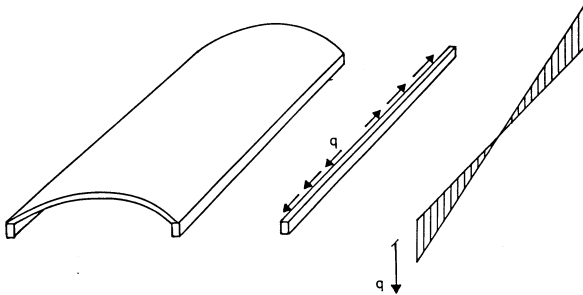
Figuur 1.4.



Figuur 1.5.

Deze randstaven worden door de schaal belast met een verdeelde axialebelasting die in lengterichting bij benadering lineair varieert en waarbij het nulpunt in het midden van de overspanning van de balk ligt (zie figuur 1.6).

De staaf wordt hierdoor op rek belast. Aan de lezer wordt overgelaten het verloop van de normaalkracht  $N$  en de verplaatsing  $u$  in deze randstaaf te bepalen, bijvoorbeeld indien aan het ene uiteinde geldt  $u = 0$ , en aan het andere uiteinde  $N = 0$ .



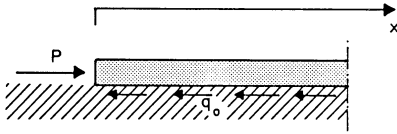
Figuur 1.6.

Het volgende voorbeeld betreft een plaat van onbepaalde lengte die rust op een ondergrond (figuur 1.7). Men kan hierbij denken aan een wegdek. De plaat wordt aan het linker uiteinde voorgespannen door er een kracht  $F = P$  op uit te oefenen.

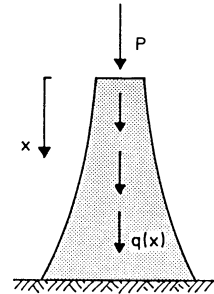
Opvolgende doorsneden van de plaat zullen daardoor naar rechts verplaatsen, waardoor wrijvingskrachten zullen ontstaan tussen de plaat en de ondergrond. Wordt aangenomen dat het hier Coulombwrijving betreft, dan zijn deze wrijvingskrachten uitsluitend afhankelijk van de contactdruk tussen plaat en ondergrond. Is deze constant dan zijn ook de wrijvingskrachten constant en wordt de plaat belast door een gelijkmatig verdeelde belasting  $q_0$  naar links. Hierdoor zal de normaalkracht  $N$  in de plaat, die aan het linker uiteinde gelijk is aan  $-P$ , in absolute grootte lineair afnemen en op een afstand  $l = P/q_0$  gelijk zijn aan nul. Rechts van dit punt is van voorspanning in het geheel geen sprake.

Een soortgelijk verschijnsel doet zich voor bij het voorspannen van betonbalken of liggers met gebogen voorspankabels.

De staaf die in een medium wordt gedrukt komt men tegen als heipaal. De bovenbelasting oefent op de paal een drukkracht uit. De grond oefent op de paal de zogenaamde mantelwrijving of kleef uit, waardoor de normaalkracht in de paal naar beneden afneemt en de kracht aan de punt kleiner is dan de bovenbelasting. Het zou te ver voeren om hierop nader in te gaan.



Figuur 1.7.



Figuur 1.8.

Een *afwijkende probleemstelling* wordt in het volgende vraagstuk gegeven. Een kolom met variabele oppervlakte van de doorsnede  $A(x)$  draagt een bovenbelasting  $F = P$ , zodat daar geldt  $N = -P$  (figuur 1.8).

De belasting wordt verder gevormd door het eigen gewicht:  $q(x) = \gamma A(x)$ , waarin  $\gamma$  het volumiek gewicht van het materiaal is.

Geëist wordt dat in alle doorsneden dezelfde spanning aanwezig is, gelijk aan een vastgestelde toelaatbare spanning  $-\sigma_0$  zodat een, optimaal materiaalverbruik wordt verkregen. Gevraagd wordt welke vorm de kolom moet hebben om aan deze eis te voldoen, of met andere woorden het verloop van de doorsnede als functie van de hoogte. Met de gestelde eis is de normaalkracht  $N = -A\sigma_0$  en is dus

$$\frac{dN}{dx} = -\sigma_0 \frac{dA}{dx}$$

Met de eerder gegeven belasting  $q$  gaat vergelijking (1.1) over in:

$$\gamma A = \sigma_0 \frac{dA}{dx} \quad \text{of:} \quad \frac{dA}{dx} - \frac{\gamma}{\sigma_0} A = 0$$

De oplossing van deze vergelijking luidt:  $A = C e^{(\gamma/\sigma_0)x}$ . De integratieconstante  $C$  volgt uit de randvoorwaarde voor  $x = 0$ , waar geldt:  $A = A_0 = \frac{P}{\sigma_0}$ .

Substitutie hiervan in bovenstaande vergelijking geeft:  $C = A_0$ . Voor het verloop van de doorsnede wordt dus gevonden:

$$A = A_0 e^{(\gamma/\sigma_0)x}$$

Deze neemt naar beneden exponentieel toe.