

EINDIGE-ELEMENTENMETHODE

EINDIGE-ELEMENTENMETHODE

VOOR

STAAFCONSTRUCTIES

JOHAN BLAAUWENDRAAD

Emeritus-hoogleraar Toegepaste Mechanica
faculteit Civiele Techniek, Technische Universiteit Delft

VSSD

De bezitter van dit boek heeft op <http://www.vssd.nl/hlf/f040a.htm> toegang tot het programma MatrixFrame®. MatrixFrame® is voor onderwijsdoeleinden belangeloos ter beschikking gesteld door Matrix Bouwtechnische Automatisering te Nijmegen. Deze studentenversie is afgeleid van het standaard 2D raamwerkprogramma MatrixFrame® versie 1.4.

Matrix Bouwtechnische Automatisering draagt geen verantwoordelijkheid, in welke vorm dan ook, ontstaan door het gebruik van het programma.

Via <http://www.vssd.nl/hlf/f040a.htm> kan men tevens het bestand van het Uitwerkingenboek downloaden. Dit bestand heeft de toegangscode het ISB-nummer van dit boek (zonder streepjes).

© VSSD

Eerste druk 2008

Eerste druk (Academic Service) 1996, tweede druk 2000

Uitgegeven door de VSSD

Leeghwaterstaat 42, 2628 CA Delft, The Netherlands

tel. +31 15 278 2124, telefax +31 15 278 7585, e-mail hlf@vssd.nl

internet: www.vssd.nl/hlf

URL over dit boek: www.vssd.nl/hlf/f040.htm

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden veelevoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

ISBN 978-90-6562-189-4

NUR 955

Trefwoord: eindige elementen

Woord vooraf

Dit leerboek voorziet in een behoefte van het onderwijs en de constructiepraktijk. Voor het onderwijs richt het zich primair op studenten civiele techniek (weg- en waterbouwkunde) en bouwkunde aan technische hogescholen en universiteiten. Het kan daarnaast zeker ook goede diensten bewijzen aan opleidingen werktuigbouwkunde, maritieme techniek, industrieel ontwerpen en lucht- en ruimtevaarttechniek. De behandelde stof kan uitstekend als basis voor zelfstudie dienen, waarschijnlijk in het tweede studiejaar.

In kringen van constructief-ontwerpers is aan het leerboek behoefte omdat nog altijd veel rekenprogrammatuur wordt gebruikt als ‘zwarte doos’. Toezichthoudende instanties constateren dat veel berekeningen worden uitgevoerd zonder inzicht in de achtergronden van de software. Mede door de vele wenken, waarschuwingen en praktijkopdrachten beoogt het boek hierin verbetering te brengen.

Dit boek is het resultaat van samenwerking tussen docenten van de TU Delft en technische hogescholen in Nederland. Door toedoen van het Onderwijs Innovatie Centrum van de hogescholen is een responsiegroep van docenten gevormd, die de concepttekst van waardevol commentaar heeft voorzien. Door de vele wenken en aanbevelingen sluit het resultaat hopelijk goed aan op de onderwijspraktijk en de beoogde doelgroep in de praktijk.

Graag wil ik de collega-docenten ir. J.W. Gerner van de Hogeschool Haarlem, ir. G.E. Jansen van de Hogeschool Alkmaar, ir. J.H.M. Leen van de Hogeschool Enschede en ir. W.J.M. Peperkamp van de Hogeschool 's-Hertogenbosch danken voor hun gewaardeerde bijdrage. Datzelfde geldt voor mijn Delftse collega ir. C. Hartsuijker, die heeft gewaakt over de goede aansluiting op het onderwijs in de eigen faculteit. Aan de dames Carla Roovers en Jani Sutjiadi danken we de uitstekend verzorgde tekst, formules en tekeningen. Mijn vrouw Henny gaf de gebruikelijke stille bijdrage en wilde opnieuw vertrouwen dat het na dit boek echt rustiger zou worden.

Woord vooraf bij 2e druk

Het geeft voldoening dat het in 1996 gepubliceerde leerboek over de eindig-elementenmethode voor constructeurs nog steeds belangstelling geniet. Het ultieme doel is ook nog steeds geldig: het boek wil de theorie toelichten zodat rekenprogrammatuur voor staafconstructies niet als 'zwarte doos' wordt toegepast.

Het karakter van het boek is niet gewijzigd, al wijzigt de onderwijsomgeving wel. De auteur weet van de zorg over het voortdurend afkalvend mechanicaonderwijs in het hoger beroepsonderwijs, maar meent toch dat er plaats moet blijven voor onderwijs over de grondslagen en vertrouwt dat die plaats er ook zal blijven. In de universiteiten en bij professionele Masteropleidingen voor post-HBO-onderwijs is dat zeker het geval. Hij hoopt dat het leerboek opnieuw aan het gestelde doel dienstbaar mag zijn.

De leersstof zelf is niet gewijzigd, maar wel het bijgevoegde programma. Dat draait nu onder Windows. Mede om te waarborgen dat de notatie van de programmatuur blijft sporen met die van het boek, is overgegaan op het programma Matrix Frame. Lokaal zijn in het boek door deze verandering van software enige wijzigingen doorgevoerd. Het afzonderlijke boekje met uitwerkingen van de opgaven, dat bij de uitgever verkregen kan worden, is ook op het nieuwe programma aangepast. Ik spreek graag mijn dank uit aan ir. Ron Weener en zijn medewerkers van Matrix voor de zorgvuldige medewerking bij alle correctiewerk. Ook aan mevrouw Jeannette Delrock-Bowier van Fastgood die toegewijd de wijzigingen in tekst en formules heeft aangebracht.

Het doet de auteur genoegen dat de uitgever inmiddels ook het onderwijs van de Delftse mechanicacollega ir. C. Hartsuijker in boekvorm het licht doet zien. Met die boeken vormt dit boek over de elementenmethode een eenheid, zowel qua stof als qua notatie. Ik wens de gezamenlijke onderwijsvruchten van de Delftse 'school' een heel goede ontvangst toe in opleiding en praktijk.

Inhoudsopgave

	blz.
Symbolenlijst	ix
Inleiding	xi
1 De eindige-elementenmethode in grote lijnen	3
1.1 Het te behandelen probleem	3
1.2 Definities en tekenafspraken	5
1.2.1 Knoopbelasting	6
1.2.2 Knoopverplaatsingen	8
1.2.3 Verbindingskrachten en snedekracht	9
1.3 De constitutieve betrekking van een element	11
1.4 Evenwicht van knopen en kinematica in verbindingen	14
1.5 In elkaar voegen van alle betrekkingen	15
1.6 Oplossen van de globale vergelijkingen	17
1.7 Elementkrachten, normaalkracht en oplegreactie	18
*1.8 Systematiek en elementstijfheidsmatrix	22
1.9 Systematiek en globale stijfheidsmatrix	25
1.10 Invoer en uitvoer van computerberekening	30
1.11 Wenken en waarschuwingen	36
1.12 Algemeen geldend assenstelsel	40
1.13 Samenvatting	46
1.14 Opdrachten	50
2 Vakwerken	53
2.1 Probleemstelling	53
2.2 Elementstijfheidsmatrix	54
2.2.1 Eerste manier, kolomsgewijs	56
*2.2.2 Tweede manier, formele methode	57
2.3 Assemblage van de globale stijfheidsmatrix	58
2.4 Toepassingen	61
2.5 Samenvatting	68
2.6 Opdrachten	69
3 Vaste, verende en hellende ondersteuning	73
3.1 Voorgescreven verplaatsing	73
3.2 Verende oplegging	76
*3.3 Oplegging onder een hoek	78
3.4 Samenvatting	80
3.5 Opdrachten	81
4 Liggers	85
4.1 Belasting op knopen	85
4.2 Bepalen van de elementstijfheidsmatrix	87
4.2.1 Kolomsgewijs	87
*4.2.2 Formele methode	90

* Deze paragrafen kunnen eventueel worden overgeslagen.

	blz.
4.3	Assemblage en oplossingen van de globale vergelijkingen 93
4.4	Berekening van momenten en dwarskrachten 94
4.5	Belasting op het element 96
4.5.1	Eerste berekeningsstap 97
4.5.2	Tweede berekeningsstap 99
4.5.3	Berekening van momenten en dwarskrachten 99
4.6	Verplaatsbare knopen 102
4.6.1	Eerste berekeningsstap, de knoopbelasting 103
4.6.2	Tweede berekeningsstap, de elementstijfheidsmatrix 104
4.7	Toepassing 119
4.8	Computerberekening 114
4.9	Samenvatting 117
4.10	Opdrachten 119
5	Orthogonale portalen en raamwerken 123
5.1	Probleemstelling 123
5.2	Primaire krachtsverdeling en knoopbelasting 125
5.2.1	Belastingsgeval 1 met belasting q 125
5.2.2	Belastingsgeval 2 met puntlast F 125
5.3	Elementstijfheidsmatrices 126
5.4	Assemblage 130
5.5	Uitwerking zonder extensie 132
5.5.1	Belastingsgeval 1 met belasting q 132
5.5.2	Belastingsgeval 2 met puntlast F 134
5.6	Uitwerking met extensie 137
5.7	Samenvatting 138
5.8	Opdrachten 140
*6	Algemene staafconstructies 143
* 6.1	Prismatische staaf, gewone knopen 145
* 6.2	Prismatische staaf, bijzondere knopen 146
* 6.3	Niet-prismatische staaf 148
* 6.4	StAAF met dwarskrachtvervorming 152
* 6.5	StAAF met scharnierende verbindingen 154
* 6.6	StAAF met verende verbindingen 155
6.7	Samenvatting 156
6.8	Opdrachten 157
Appendix A	- Matrixrekening 159
A.1	De begrippen matrix en vector 159
A.2	Matrixvermenigvuldiging 160
A.3	Getransponeerde matrix en vector 162
A.4	Oplossen van vergelijkingen 163
A.5	Factoriseren van een matrix 167
A.6	Inverteren van een matrix 168
Appendix B	- * Arbeidsbewijs 170
Antwoorden van de opdrachten	171
Trefwoordenregister	173

Symbolenlijst

a	lengte van element
A	oppervlakte van doorsnede
A_V	oppervlakte voor dwarskrachtstijfheid
\mathbf{B}	kinematische matrix
c	verkorte notatie voor $\cos \alpha$
C_N	flexibiliteit voor extensie (compliantie)
C	2×2 flexibiliteitsmatrix voor buiging
C_V	flexibiliteit voor dwarskracht
D_N	stijfheid voor extensie
\mathbf{D}	constitutieve matrix; diagonaalmatrix (in appendix A)
e	bovenindex om element aan te duiden
e_N	extensie van axiaal belast element
e_1	vervormingsparameter voor buiging (hoekverdraaiing)
e_2	vervormingsparameter voor buiging (hoekverdraaiing)
\mathbf{e}	vector van vervormingsparameters e_N, e_1, e_2
e_V	extra kanteling van doorsnede door dwarskracht
E	elasticiteitsmodulus
\mathbf{E}	eenheidsmatrix (in appendix A)
F	kracht
F_{xi}	kracht in x -richting in knoop i
F_{zi}	kracht in z -richting in knoop i
F_{xi}^o	oplegreactie in x -richting in knoop i
F_{zi}^o	oplegreactie in z -richting in knoop i
F_{xi}^e	elementkracht in x -richting aan uiteinde i
F_{zi}^e	elementkracht in z -richting aan uiteinde i
$F_{zi}^e_{\text{prim}}$	kracht in z -richting op knoop i door belasting op element e
f_i	vector van krachten voor knoop i
f	vector van knoopkrachten voor globale constructie
f_{prim}	vector van primaire knoopkrachten voor globale constructie
f_{tot}	totale vector van knoopkrachten ($f - f_{\text{prim}}$)
f^e	vector van elementkrachten
G	glijdingsmodulus
h	hoogte van element
I	tweede-orde oppervlaktemoment van doorsnede (buigtraagheidsmoment)
I_w	torsietraagheidsmoment
i	knoopnummer
j	knoopnummer
\mathbf{K}	globale stijfheidsmatrix
K_{ij}	component van stijfheidsmatrix
K_i	stijfheid van veer bij vrijheidsgraad u_i
\mathbf{K}^e	elementstijfheidsmatrix
l	lengte van element of overspanning
\mathbf{L}	benedendriehoeksmatrix (in appendix A)

M	buigend moment in element (snedegrootheid)
M_1	moment links in element (snedegrootheid)
M_2	moment rechts in element (snedegrootheid)
\mathbf{M}	vector van momenten M_1 en M_2
M_w	wringend moment (snedegrootheid)
n	aantal knopen, aantal vrijheidsgraden
N	normaalkracht (snedegrootheid)
o	bovenindex om een voorgeschreven verplaatsing of oplegreactie aan te geven
\mathbf{p}	hulpvector (in appendix A)
q	gelijkmatig verdeelde belasting
\mathbf{q}	hulpvector (in appendix A)
R	oplegreactie
s	verkorte notatie voor $\sin \alpha$
\mathbf{s}	vector van snedegrootheden N, M_1, M_2
t	verdeelde torsiebelasting
T	bovenindex om transponeren aan te geven
T	koppel
T_{yi}	koppel om y -as in knoop i
$T_{yi \text{ prim}}$	koppel om y -as in knoop i ten gevolge van belasting op element
$T_{yi \text{ tot}}$	totaal koppel om y -as in knoop i ten gevolge van belasting op element
T_{yi}^o	oplegreactie die correspondeert met voorgeschreven rotatie
u	verplaatsing, vrijheidsgraad
u_{xi}	verplaatsing in x -richting van knoop i
u_{zi}	verplaatsing in z -richting van knoop i
u_{xi}^o	voorgeschreven verplaatsing in x -richting voor knoop i
u_{zi}^o	voorgeschreven verplaatsing in z -richting voor knoop i
\mathbf{u}	vector van verplaatsingen voor globale constructie
\mathbf{u}^e	vector van elementverplaatsingen
\mathbf{U}	bovendriehoeksmatrix (in appendix A)
V	dwarskracht (snedegrootheid)
x	coördinaat van globale assenstelsel
x_l	coördinaat van lokale element-assenstelsel
y	coördinaat van globale assenstelsel
y_l	coördinaat van lokale element-assenstelsel
z	coördinaat van globale assenstelsel
z_l	coördinaat van lokale element-assenstelsel
α	hoek tussen element en globale x -as
β_1	hoek tussen globale x -as en de x_1 -as van een lokaal assenstelsel voor knoop 1
β_2	hoek tussen globale x -as en de x_2 -as van een lokaal assenstelsel voor knoop 2
ε	specifieke rek
η	vormfactor voor dwarskrachtstijfheid
θ	specifieke verwringing; hoekverdraaiing (hulpgrootheid)
φ_{yi}	rotatie om y -as van knoop i
φ_{yi}^o	voorgeschreven rotatie om y -as van knoop i
ψ	coëfficiënt voor verhouding tussen buigstijfheid en rekstijfheid
ξ	coëfficiënt voor aandeel van dwarskrachtvervorming in de constitutieve matrix \mathbf{D} voor een buigingselement

Inleiding

Construerende ingenieurs kunnen het overgrote deel van de te ontwerpen constructies modelleren als een staafconstructie in het platte vlak en deze analyseren met behulp van een computerprogramma. Dit boek biedt daarvoor zowel de theoretische achtergrond als de praktische vorming en is bedoeld als leerboek voor ingenieurs in opleiding en als achtergrondmateriaal voor constructief-ontwerpers in de praktijk. De directe aanleiding voor de totstandkoming van dit boek is de groeiende behoefte aan goede leerstof voor zelfstudie. Die behoefte bestaat zowel voor de kern van technische hogere beroepsopleidingen, zoals weg- en waterbouwkunde, bouwkunde en werktuigbouwkunde, als voor de basisstudie van universitaire technische opleidingen.

Methoden en constructietypen

De eindige-elementenmethode (EEM) voor staafconstructies is internationaal aanvaard als de meest geschikte aanpak voor het berekenen van sterkte- en stijfheidsproblemen met de computer. Omdat verplaatsingen de rol van onbekende spelen, spreekt men ook over de verplaatsingsmethode. De constructie wordt opgedeeld in staafelementen, die op een systematische wijze worden geassembleerd tot wat heet een globaal systeem, de constructie. In dit leerboek worden ééndimensionale (1D) en tweedimensionale (2D) constructies behandeld. Voorbeelden van 1D-constructies zijn schoorstenen, masten, liggers en op wringing belaste assen. Voorbeelden van 2D-constructies zijn vakwerken, portalen en raamwerken. Ruimtelijke staafconstructies en balkroosters behoren niet tot de leerstof van dit boek.

Theorie en praktijk

Al is het boek niet opgezet als werkboek, het besteedt wel veel aandacht aan het in de praktijk toepassen van de methode. Het accent ligt niet alleen op het toelichten van de methode en de uitwerking ervan in computerprogramma's, maar ook op het werken met die programma's. Elk hoofdstuk wordt afgesloten met een aantal opdrachten. Een deel daarvan bestaat uit theorie-opdrachten om te toetsen of de theorie inderdaad wordt begrepen. Dat begrip is een belangrijk doel van dit leerboek. Het leidt niet op tot programmeur, maar biedt de constructeur achtergrondkennis. De constructief-ontwerper die een computerprogramma gebruikt, dient te weten welke gedachten en formele concepten erin zijn verwerkt, welke tekenafspraken gelden, waarom zoveel vrijheidsgraden per knoop worden gehanteerd, welke valkuilen er zijn, enzovoort. Hij of zij moet goede randvoorwaarden (opleggingen) kunnen formuleren en invoeren en dient doorkneet te zijn in het controleren van evenwicht. Een ander deel van de opdrachten bestaat uit praktijkopdrachten. Het beoogde leerdoel is immers ook, naast begrip, het oordeelkundig kunnen omgaan met beschikbare programmatuur. Daarom

geeft dit boek ook toegang tot een pc-programma (zie pag. iv). De praktijkopdrachten zijn bedoeld om de gepresenteerde theorie te herkennen in het omgaan met dit programma, om vaardigheid te ontwikkelen en om te attenderen op valkuilen. Het boek is overigens onafhankelijk van het programma geschreven. De op-drachten kunnen met elk ander programma dat op de markt is worden uitgevoerd. Achter in het boek is een korte lijst met antwoorden van de opdrachten opgenomen. In het afzonderlijke Uitwerkingenboek (te downloaden van de website van het boek, zie eveneens pag. iv) zijn alle opdrachten volledig uitgewerkt.

Gekozen opzet

Bij de eindige-elementenmethode kunnen we twee verschillende aspecten onderscheiden: 1. de stijfheidsmatrix van de afzonderlijke elementen en 2. de procesgang van de volledige berekening. Het tweede aspect, de gang van zaken in een eindige-elementenmethodeberekening, is onafhankelijk van de ingewikkeldheidsgraad van de elementen. De grote lijn in een programma is hetzelfde voor een eenvoudige 1D-constructie (schoorsteen) en voor een complexe 2D-constructie. Hier zal eerst die grote lijn worden gepresenteerd aan de hand van het eenvoudigste element in een 1D-constructie. Dat is een element met alleen normaal-kracht en met één vrijheidsgraad per knoop. Zo wordt ernaar gestreefd de essentie zichtbaar te houden en deze niet te laten verdrinken in een veelheid van wiskundige bewerkingen. Daarna worden andere elementsoorten besproken. De afleiding van de elementstijfheidsmatrices zal plaatsvinden op een wijze die aansluit bij reeds aanwezige kennis. Naarmate de hoofdstukken vorderen wordt de moeilijkheidsgraad geleidelijk opgevoerd. De eenvoudige constructie met één vrijheidsgraad per knoop in hoofdstuk 1 wordt gevolgd door een vakwerkconstructie in hoofdstuk 2. Nu zijn er twee vrijheidsgraden per knoop, maar in een element treedt nog steeds alleen extensie (vervorming door normaalkracht) op. De inwendige krachtswerking ligt met één parameter vast, de constante normaalkracht. In hoofdstuk 3 wordt de lijn van opbouwende moeilijkheidsgraad even onderbroken. De lezer heeft dan voldoende begrip van de methode om de verschillende manieren te kunnen bevatten waarop een constructie kan worden ondersteund en hoe dat wordt verwerkt in een computerprogramma. In hoofdstuk 4 wordt daarna met buiging begonnen. Hier wordt de ligger besproken. Evenals in hoofdstuk 1 is er in de eenvoudigste vorm één onbekende per knoop, de rotatie boven de oplegging. Maar in de staaf moet je nu de krachtsverdeling vastleggen met twee parameters, want het moment is niet meer constant maar lineair. Nadat dit eenvoudige geval is behandeld, wordt de bespreking uitgebreid naar liggers waarin ook tussenknopen mogen optreden. Men hanteert dan twee vrijheidsgraden per knoop, een zakking en rotatie. In hoofdstuk 5 wordt de overstap naar portalen en raamwerken gemaakt. Deze zijn nog eenvoudig. Er komen alleen

staven in voor die loodrecht op elkaar staan, horizontaal en verticaal. Deze orthogonale staafconstructies worden op twee manieren uitgewerkt. Het gebeurt eerst met weglating van extensie en daarna met inbegrip van extensie. In het laatste geval wordt de bespreking al behoorlijk algemeen. De staaf verdisconteert dan extensie én buiging en gebruikt per knoop drie vrijheidsgraden. Het meest algemene geval wordt ten slotte in hoofdstuk 6 behandeld. Elke staaf mag nu een willekeurige positie in het platte vlak innemen, per knoop mag een lokaal assenstelsel voor de vrijheidsgraden worden gekozen, je kunt dwarskrachtvervorming meenemen, enzovoort.

Veronderstelde voorkennis

De auteur is zich ervan bewust dat er in de onderwijswereld twee visies zijn op de plaats van ‘computermechanica’ in het curriculum. De eerste visie is, dat de student eerst vertrouwd moet worden gemaakt met evenwicht, doorsnede-eigenschappen, zakkingslijnen en dergelijke. De student moet voor eenvoudige constructies handberekeningen kunnen uitvoeren. Nadat over deze kennis wordt beschikt en inzicht in constructiegedrag en krachtswerking is bijgebracht, is er pas plaats voor behandeling van computergeoriënteerde mechanicamethoden.

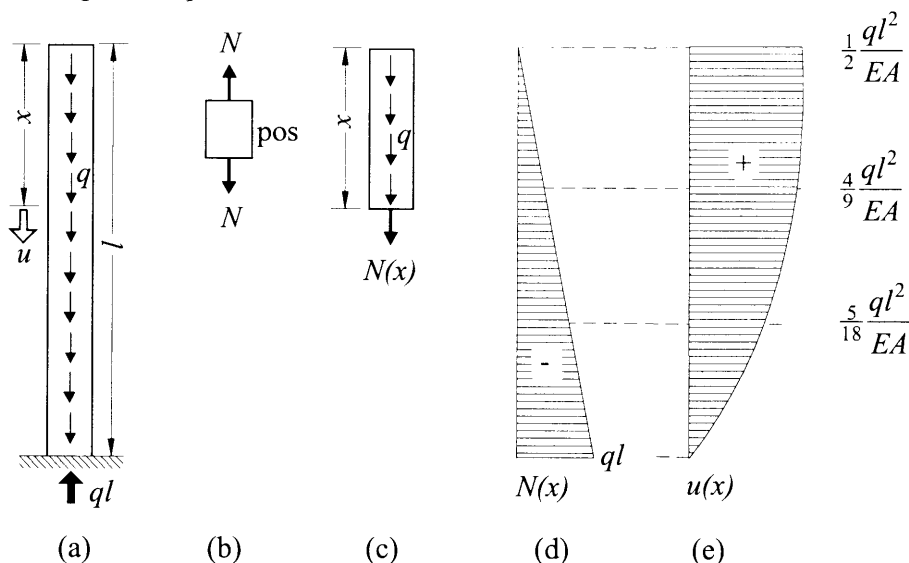
In de tweede visie wordt de student reeds in een veel vroeger stadium van de opleiding op het spoor van de formele verplaatsingsmethode gezet. Voorstanders van deze aanpak dragen de overtuiging uit dat het inzicht in het constructiegedrag op deze wijze evengoed wordt bijgebracht. De moderne student is - denkt men - in het middelbaar onderwijs voldoende vertrouwd gemaakt met lineaire algebra en pakt de eigentijdse behandeling met matrixrekening wel op. Het is niet nodig hier over deze twee standpunten een uitspraak te doen. In dit boek wordt aange-sloten bij de eerste opvatting, zonder over de tweede een oordeel uit te spreken. Wel wordt gemeend dat de tweede visie nog steeds experimenteel is en een veel groter beroep doet op de didactische bekwaamheden van de docent. Er mag niet worden aangenomen dat alle HBO-studenten vertrouwd zijn met matrixrekening. Niet allen hebben immers een VWO-vooropleiding. De auteur is ervan uitgegaan dat het boek een plaats krijgt in het tweede studiejaar van de HBO-opleidingen en van de universitaire studies. De student beheerst reeds grondig wat evenwicht is en weet wat momenten-, dwarskrachten- en normaalkrachtenlijnen zijn. Hij kan voor elementaire gevallen zakkingen en rotaties berekenen uit een bekende momentenlijn. De gebruiker van dit boek is ook vertrouwd met de begrippen statisch bepaald en onbepaald. Op al die kennis wordt een beroep gedaan om de theorie te ontvouwen of om resultaten te interpreteren. Het gebruik van matrix-rekening kan niet geheel worden vermeden, maar er wordt uiterst beperkt gebruik gemaakt van deze wiskundige voorkennis. Wat er voor nodig is, wordt op een voor praktijkmensen bevattelijke wijze in Appendix A uitgelegd.

1 De eindige-elementenmethode in grote lijnen

In dit hoofdstuk zullen we de gedachtengang van de eindige-elementenmethode toelichten aan de hand van een zeer eenvoudige constructie. Daarvoor valt de keuze op een slanke verticale constructie met een constante doorsnede, bijvoorbeeld een schoorsteen, een vrijstaande mast of de stijve kern van een gebouw. De enige belasting bestaat uit het eigen gewicht, zodat in dit eenvoudige geval uitsluitend normaalkrachten zullen optreden. In paragraaf 1.1 behandelen we het probleem om te beginnen zonder gebruik te maken van de eindige-elementenmethode. We passen alleen basiskennis toe om de oplossing te bepalen. Zo vinden we de *exacte* oplossing. Het is goed deze te kennen, om haar te kunnen vergelijken met de latere *benaderde* uitkomst van de eindige-elementenmethode.

1.1 Het te behandelen probleem

In figuur 1.1a is een constructie getekend. De hoogte van de staafconstructie is l , de oppervlakte van de doorsnede is A en het gewicht per eenheid van lengte is q . De elasticiteitsmodulus van het gebruikte materiaal is E . Aan de voet van de constructie zal een naar boven gerichte oplegreactie optreden ter grootte van het totale gewicht ql .



Figuur 1.1 Berekening van een verticale staaf onder eigengewicht q . De normaalkracht N verloopt lineair en de verplaatsing u parabolisch.

Als q bekend is, kunnen we op iedere positie langs de staaf de grootte van de normaalkracht N uitrekenen. Deze zal een functie van x zijn. De tekenafspraken voor N is hier dat we de waarde positief kiezen als in het materiaal een trekkracht optreedt en negatief voor een drukkracht. In figuur 1.1b is een staafdeeltje getekend met een positieve normaalkracht. Op deze tekenafspraken komen we uitgebreider terug in paragraaf 1.2. In figuur 1.1c is het bovenste deel van de staafconstructie afzonderlijk getekend, met de belasting die erop werkt. De lengte van het staafdeel is x . Langs de staaf grijpt het eigengewicht q aan per eenheid van lengte, dus het gewicht van het beschouwde staafdeel is qx . In de snede onder aan het staafdeel heerst de normaalkracht $N(x)$. In figuur 1.1c is deze getekend voor het geval $N(x)$ positief is, dus als trekkracht. Voor het staafdeel wordt nu het verticale krachtenevenwicht opgesteld, ofwel de evenwichtsvergelijking in de x -richting:

$$\Sigma F_{\text{vert}} = 0 \quad \rightarrow \quad qx + N(x) = 0$$

Hieruit volgt

$$N(x) = -qx \tag{1.1}$$

Omdat q en x beide positief zijn, is de normaalkracht negatief en dus een drukkracht, zoals was te verwachten. We constateren dat de normaalkracht lineair aangroeit van nul boven in de staaf tot een maximumwaarde $-ql$ onderin. In figuur 1.1d is dit verloop getekend. Nu we op iedere plaats langs de staaf de normaalkracht kennen, weten we ook via de de wet van Hooke de rek:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA}$$

Hierin is EA de *rekstijfheid* van de staaf. In ons voorbeeld met een prismatische staaf is EA een constante en N een functie van x , zie (1.1). Ook ε is dus een functie van x :

$$\varepsilon(x) = -\frac{q}{EA} x \tag{1.2}$$

De rekken zijn negatief, dus de staaf wordt korter. Onder in de staaf kiezen we een starre ondersteuning waarin geen verplaatsing in de x -richting kan optreden. De bovenkant van de staaf verplaatst dus bij het korter worden in neerwaartse richting, dat is in de positieve x -richting. Uitgezonderd de onderste doorsnede zal elke doorsnede in principe verplaatsen. We noemen deze verplaatsing $u(x)$ en kiezen deze positief als de doorsnede verplaatst in de positieve x -richting, zie figuur 1.1a. Er is een direct verband tussen de rek ε en de verplaatsing u . De rek is de afgeleide van de verplaatsing

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \tag{1.3}$$

Omgekeerd kunnen we de verplaatsing ook uit de rek bepalen door te integreren:

$$u = \int \varepsilon \, dx \quad (1.4)$$

We kunnen ε van (1.2) substitueren in (1.4) en vinden

$$u = -\frac{q}{EA} \int x \, dx$$

De primitieve van x is $\frac{1}{2}x^2$ en bij het integreren moet een constante C worden toegevoegd. We krijgen dus:

$$u = -\frac{q}{2EA} x^2 + C$$

De waarde van C volgt uit de eis dat de constructie onderin niet kan verplaatsen, dus $u=0$ voor $x=l$. Dat levert $C = \frac{1}{2}ql^2/EA$ en de functie voor u wordt

$$u = \frac{q}{2EA} (l^2 - x^2) \quad (1.5)$$

Het parabolisch verloop van deze verplaatsing is in figuur 1.1e weergegeven. De waarde is voor elke x positief en wordt nul voor $x=l$ onder in de staaf. Voor een aantal posities is de waarde bijgeschreven. De grootste verplaatsing treedt op aan het vrije uiteinde bovenin. De waarde is $\frac{1}{2}ql^2/EA$. Bovenin heeft de verplaatsingsfunctie een verticale raaklijn. De afgeleide is daar dus nul. Dat klopt, want de afgeleide is de rek, en deze moet nul zijn waar N nul is. Dat is het geval boven in de staaf.

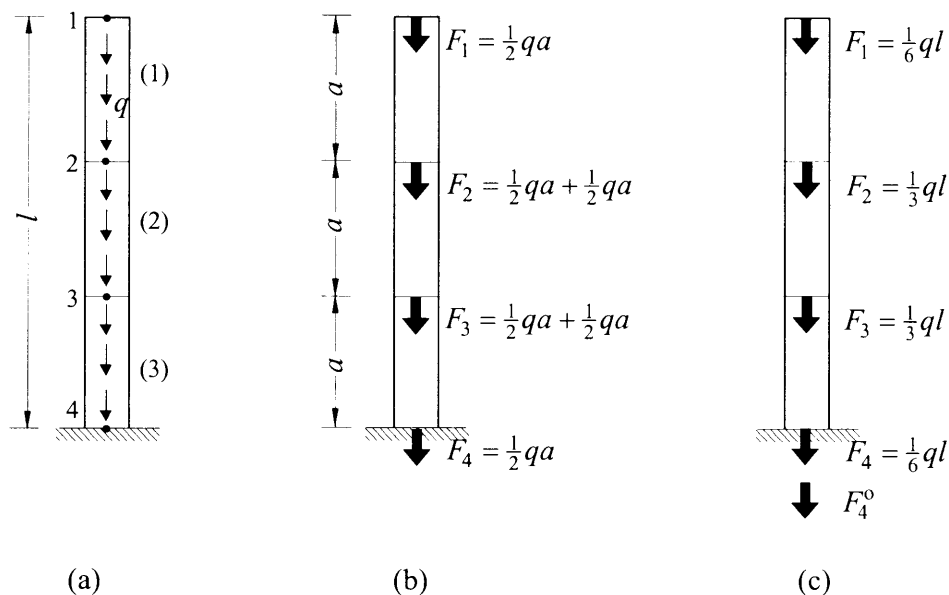
Opmerking

Op deze plaats wordt nog eens de aandacht gevestigd op de gevolgde oplossingsprocedure. Eerst is op basis van uitsluitend evenwicht de normaalkracht N berekend. Pas daarna wordt als laatste resultaat de verplaatsing u bepaald. Dat blijkt hierna in de eindige-elementenmethode anders te zijn. Dan zullen we eerst de verplaatsing vinden en pas daarna de normaalkracht.

1.2 Definities en tekenafspraken

De verticale staaf met constante doorsnede onder de belasting door eigen gewicht gaan we nu behandelen met de methode der eindige elementen. We kiezen weer een x -ordinaat bij de constructie met een positieve richting van boven naar beneden. De eerste handeling in de methode is om de constructie te verdelen in een aantal *elementen* met elk een eindige lengte. De overgangen tussen de elementen noemen we *knopen*.

In figuur 1.2a is een voorbeeld getoond met drie elementen en vier knopen. De lengte van de drie elementen is in dit voorbeeld gelijk gekozen, maar nodig is dat niet. Het is gebruikelijk de elementen van een nummer te voorzien, oplopend van 1 tot en met 3 in ons voorbeeld. Ook de knopen worden genummerd. Deze nummering loopt in ons voorbeeld van 1 tot en met 4. In figuur 1.2a zijn de element- en knoopnummers aangegeven, de elementnummers tussen haakjes.



Figuur 1.2 (a) De staafconstructie is verdeeld in drie elementen en vier knopen. (b) De verdeelde belasting q wordt per element met lengte a vervangen door puntlasten $\frac{1}{2}qa$ in de twee aanliggende knopen. (c) Het eindresultaat. In knoop 4 is ook de te berekenen oplegreactie F_4^o aangegeven.

1.2.1 Knoopbelasting

Een tweede handeling in de eindige-elementenmethode is het vervangen van de verdeelde belasting q door puntlasten F in de knopen. Het is een kenmerk van de methode dat alléén op de knopen belasting kan worden aangebracht. Het vervangen van de verdeelde belasting q doen we per element. Per element met lengte a is de totale belasting qa . De helft hiervan voeren we af naar de knoop boven het element en de helft naar de knoop onder het element, dus $\frac{1}{2}qa$ naar elke knoop. Een knoop die tussen twee elementen ligt, krijgt dit twee keer, één uit het element erboven en één uit het element eronder. Figuur 1.2b brengt dit in beeld. Door $a = \frac{1}{3}l$ in te voeren gaat figuur 1.2b over in figuur 1.2c. In deze figuurdelen hebben de vier knoopkrachten F ook een naam gekregen, respectievelijk F_1 , F_2 , F_3 en F_4 . Het corresponderende knoopnummer is als *onderindex*