

**Opdracht 1**

$$E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$$

$$A = 0,004 \text{ m}^2$$

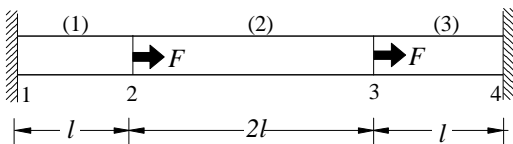
$$l = 3 \text{ m}$$

$$\frac{EA}{l} = \frac{2,1 \cdot 10^8 \times 0,004}{3} = 0,28 \cdot 10^6 \text{ kN/m}$$

De elementstijfheidsmatrix van een element (zie ook vgl. (1.43)):

$$K = \begin{bmatrix} D_N & -D_N \\ -D_N & D_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 0,28 & -0,28 \\ -0,28 & 0,28 \end{bmatrix} \text{ kN/m}$$

**Opdracht 2**



$$F = 100 \text{ kN}$$

$$A = 0,004 \text{ m}^2$$

$$E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$$

$$l = 3 \text{ m}$$

We schematiseren de ingeklemde ligger als een constructie met drie elementen en vier knopen.

Voor de elementen (1) en (3) is de elementstijfheidsmatrix gelijk aan die van opdracht 1. De elementstijfheidsmatrix voor element (2) is hiervan de helft, omdat de lengte tweemaal zo groot is:

$$K^1 = K^3 = 10^6 \begin{bmatrix} 0,28 & -0,28 \\ -0,28 & 0,28 \end{bmatrix} \quad K^2 = 10^6 \begin{bmatrix} 0,14 & -0,14 \\ -0,14 & 0,14 \end{bmatrix}$$

Assemblage van de drie elementstijfheidsmatrices tot de globale stijfheidsmatrix en samenstelling van het rechterlid geeft dan de volgende vier vergelijkingen:

$$10^6 \begin{bmatrix} 0,28 & -0,28 & & & & \\ -0,28 & 0,28 & & & & \\ & & 0,14 & -0,14 & & \\ & & -0,14 & 0,14 & & \\ & & & & 0,28 & -0,28 \\ & & & & -0,28 & 0,28 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^o \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^o \\ 100 \\ 100 \\ F_4^o \end{Bmatrix}$$

Korter geschreven:

$$10^6 \begin{bmatrix} 0,28 & -0,28 & & \\ -0,28 & 0,42 & -0,14 & \\ & -0,14 & 0,42 & -0,28 \\ & & -0,28 & 0,28 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^o \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^o \\ 100 \\ 100 \\ F_4^o \end{Bmatrix}$$

De verplaatsingen  $u_1^o$  en  $u_4^o$  zijn nul. De eerste en vierde rij worden dus niet gebruikt en evenmin de eerste en vierde kolom. Het stelsel reduceert dan tot:

$$10^6 \begin{bmatrix} 0,42 & -0,14 \\ -0,14 & 0,42 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 100 \end{Bmatrix}$$

Hiervan is de oplossing:

$$u_2 = 0,000\,357 \text{ m}$$

$$u_3 = 0,000\,357 \text{ m}$$

*Berekening van elementkrachten*

$$F_1^1 = D_N^1(u_1 - u_2) = 0,28 \cdot 10^6(0 - 0,000357) = -100,0 \text{ kN}$$

$$F_2^1 = D_N^1(-u_1 + u_2) = 0,28 \cdot 10^6(0 + 0,000357) = 100,0 \text{ kN}$$

$$F_2^2 = D_N^2(u_2 - u_3) = 0,14 \cdot 10^6(0,000357 - 0,000357) = 0,0 \text{ kN}$$

$$F_3^2 = D_N^2(-u_2 + u_3) = 0,14 \cdot 10^6(-0,000357 + 0,000357) = 0,0 \text{ kN}$$

$$F_3^3 = D_N^3(u_3 - u_4) = 0,28 \cdot 10^6(0,000357 - 0) = 100,0 \text{ kN}$$

$$F_4^3 = D_N^3(-u_3 + u_4) = 0,28 \cdot 10^6(-0,000357 + 0) = -100,0 \text{ kN}$$

*1e berekening van normaalkrachten*

$$e_N^1 = -u_1 + u_2 = 0 + 0,000357 = 0,000357 \text{ m}$$

$$N^1 = D_N^1 e_N^1 = (0,28 \cdot 10^6)(0,000357) = 100,0 \text{ kN}$$

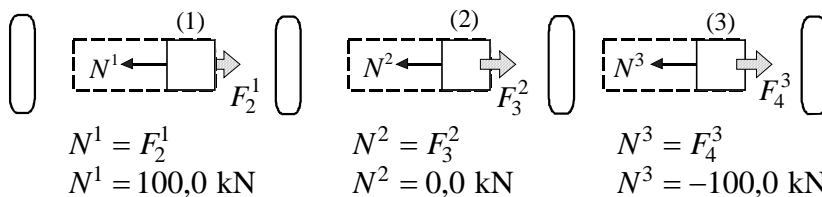
$$e_N^2 = -u_2 + u_3 = -0,000357 + 0,000357 = 0 \text{ m}$$

$$N^2 = D_N^2 e_N^2 = (0,14 \cdot 10^6)(0) = 0,0 \text{ kN}$$

$$e_N^3 = -u_3 + u_4 = -0,000357 + 0 = -0,000357 \text{ m}$$

$$N^3 = D_N^3 e_N^3 = (0,28 \cdot 10^6)(-0,000357) = -100,0 \text{ kN}$$

*2e berekening van normaalkrachten*



*Berekening van oplegreacties*

Hiervoor gebruiken we de weggelaten eerste en vierde vergelijking:

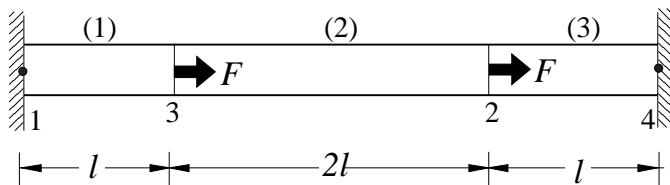
$$10^6(0,28u_1^o - 0,28u_2) = F_1^o$$

Met  $u_1^o = 0$  en  $u_2 = 0,000\ 357$  m geeft dit:  $F_1^o = -100,0$  kN.

$$10^6(-0,28u_3 + 0,28u_4^o) = F_4^o$$

Met  $u_3 = 0,000\ 357$  m en  $u_4^o = 0$  geeft dit:  $F_4^o = -100,0$  kN.

**Opdracht 3**



Ten opzichte van opdracht 2 zijn de knopen 2 en 3 verwisseld. Dezelfde elementstijfheidsmatrices gelden, maar ze zijn nu betrokken op andere knopen:

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 10^6 \begin{bmatrix} 0,28 & -0,28 \\ -0,28 & 0,28 \end{bmatrix} & 10^6 \begin{bmatrix} 0,14 & -0,14 \\ -0,14 & 0,14 \end{bmatrix} & 10^6 \begin{bmatrix} 0,28 & -0,28 \\ -0,28 & 0,28 \end{bmatrix} \\ | & | & | \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{matrix}$$

Assemblage geeft nu:

$$10^6 \begin{bmatrix} 0,28 & 0 & -0,28 & 0 \\ 0 & 0,42 & -0,14 & -0,28 \\ -0,28 & -0,14 & 0,42 & 0 \\ 0 & -0,28 & 0 & 0,28 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^o \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^o \\ 100 \\ 100 \\ F_4^o \end{Bmatrix}$$

Weglaten van eerste en vierde rij en eerste en vierde kolom:

$$10^6 \begin{bmatrix} 0,42 & -0,14 \\ -0,14 & 0,42 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 100 \end{Bmatrix}$$

Weer is de oplossing

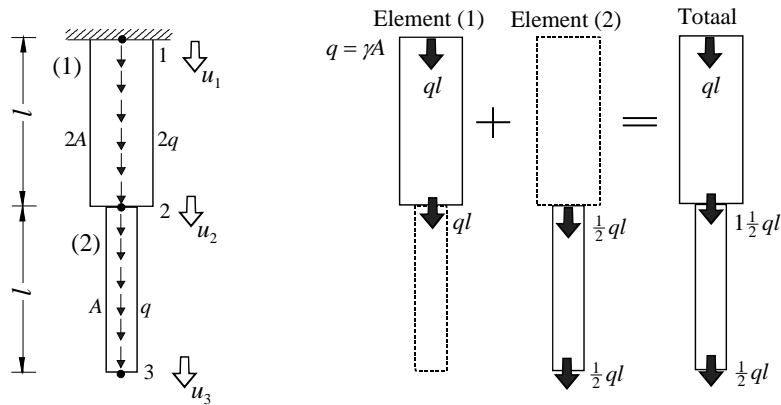
$$u_2 = 0,000\ 357 \text{ m}$$

$$u_3 = 0,000\ 357 \text{ m}$$

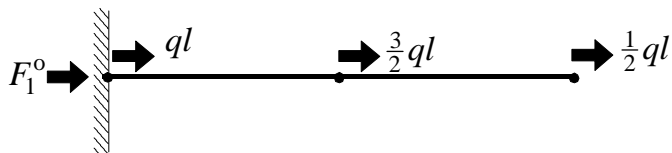
De berekening van de elementkrachten, normaalkrachten en oplegreacties verloopt als bij opdracht 2. Waar daar  $u_2$  staat, moet nu  $u_3$  staan, en omgekeerd. We zullen

dezelfde uitkomsten vinden voor de krachten. Het stelsel vergelijkingen was anders, maar de krachtsverdeling uiteindelijk niet.

#### Opdracht 4



In te voeren belasting:  $\mathbf{f} = \{ql, 1\frac{1}{2}ql, \frac{1}{2}ql\}^T$



$$\text{Element (1)} \quad \mathbf{K}^1 = \frac{E \cdot 2A}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Element (2)} \quad \mathbf{K}^2 = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assemblage tot globale stijfheidsmatrix (met  $\frac{EA}{l}$  als factor):

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ql + F_1^0 \\ \frac{3}{2}ql \\ \frac{1}{2}ql \end{Bmatrix}$$

Verwerken voorgeschreven verplaatsing:

$u_1^0 = 0$ , dus eerste rij en eerste kolom weglaten:

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = ql \begin{Bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

Oplossing:

$$u_2 = \frac{ql^2}{EA}, \quad u_3 = \frac{3}{2} \frac{ql^2}{EA}$$

Berekening normaalkrachten:

Element (1):  $e_N^1 = u_2 - u_1 = \frac{ql^2}{EA}$   
 $N^1 = \frac{E(2A)}{l} e_N^1 = 2ql$

Element (2):  $e_N^2 = u_3 - u_2 = \frac{1}{2} \frac{ql^2}{EA}$   
 $N^2 = \frac{EA}{l} e_N^2 = \frac{1}{2} ql$

Oplegreactie:

De niet-gebruikte eerste rij is:

$$\frac{EA}{l} \{2u_1^o - 2u_2\} = ql + F_1^o \quad \text{met } u_1^o = 0$$

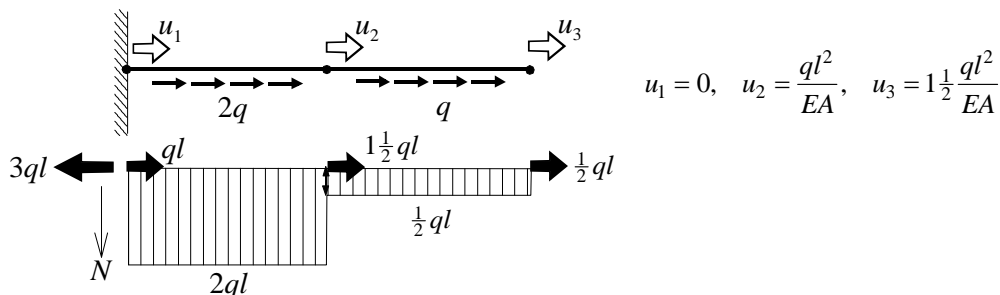
hieruit volgt:

$$F_1^o = -ql - \frac{2EA}{l} u_2$$

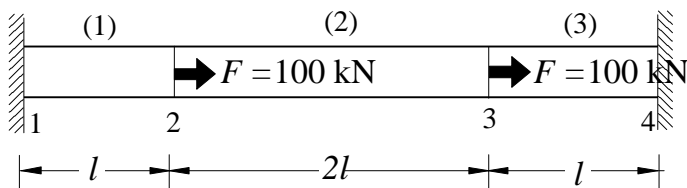
Met  $u_2 = ql^2/EA$  vinden we:

$$F_1^o = -ql - 2ql = -3ql$$

Het eindresultaat luidt:



**Opdracht 5**



$$E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2 \quad I = 0,0001 \text{ m}^4$$

$$A = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \quad l = 3 \text{ m}$$

De berekening is uitgevoerd met het programma FRAME. Aan alle drie staven is bij de opgave van de staftopologie de code 111 meegegeven voor beide uiteinden. De randcondities (voorgeschreven verplaatsingen) zijn in de knopen 1 en 4 eveneens 111. Aan de drie staven is een I toegekend van  $0,0001 \text{ m}^4$ .

In onderstaande uitvoer is de tabel voor snedegrootheden gecompriemd weergegeven.

SCIA Frame Studieverisie 03/04/1996 09:46:33 Opdracht 5

```

Krachteenheid      : kN          Lengte-eenheid      : m
Aantal staven      : 3          Aantal veren       : 0
Aantal knopen      : 4          Aantal BG          : 1
Aantal randvwn.    : 2          Aantal BC          : 0
Scheefstand        : 0          Analyse type       : FL+GL
Eigen gewicht van de constructie : 3.77
  
```

Assen stelsel definitie :

```

0-----> X+
|
|          Positieve rotatie RY van Z+ naar X+
v Z+
  
```

Knoop coördinaten

Knopnr	X	Z	Knopnr	X	Z
1	0.000	0.000	2	3.000	0.000
3	9.000	0.000	4	12.000	0.000

Profiel Eigenschappen

Code	A	I	Neta	E	S.G.	R	Prof pos	Mat
A1	4.000E-003	1.000E-004	0.000E+000	2.100E+008	78.5	Y	A1	Staal

Staftopologie

Stf	Code	I	J	NVM	Lengte	dx/dz	excIx	excIz	excJx	excJz
1	A1	1	2	111 111	3.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
2	A1	2	3	111 111	6.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
3	A1	3	4	111 111	3.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00

Randcondities

Knop	Cond	CX	CZ	CM
1	111			
4	111			

Knooplasten

(Type : 1=Krachten , 2=Knoopverplaatsingen)

BG : 1 puntlast F

Knopnr	Type	Richting	Waarde
2	1	GX	100.00
3	1	GX	100.00

Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
1	1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000	100.000	0.000	0.000
2	1	0.000	0.000357	0.000000	0.000000	0.000	0.000	0.000
3	1	0.000	0.000357	0.000000	0.000000	-100.000	0.000	0.000

Knoopverplaatsingen per knoop voor BG

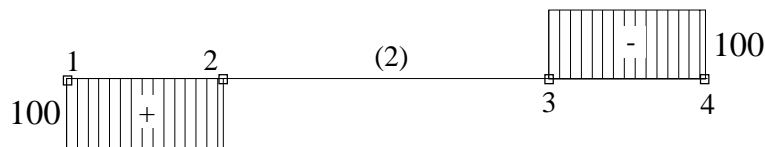
Knopnr	BG	UX	UZ	RY
1	1	0.000000	0.000000	0.000000
2	1	0.000357	0.000000	0.000000
3	1	0.000357	0.000000	0.000000
4	1	0.000000	0.000000	0.000000

Reactiekrachten voor BG per knoop

Knopnr	BG	FX	FZ	MY
1	1	-100.000	0.000	0.000
4	1	-100.000	0.000	0.000

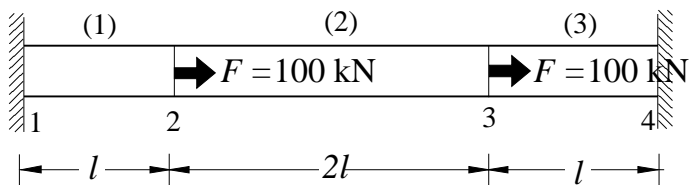
Totale evenwicht van de constructie per belastingsgeval

BG	Actie FX	React FX	Actie FZ	React FZ	Actie MY	React MY
1	200.000	-200.000	0.000	0.000	0.000	0.000



Normaalkrachten [kN] uit opdracht 5

### Opdracht 6a



$$E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2 \quad I = 0,0001 \text{ m}^4$$

$$A1 = A3 = 4 \cdot 10^{15} \text{ m}^2 \quad A2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \quad l = 3 \text{ m}$$

Zoals de computeruitvoer laat zien, wordt de berekening met het programma FRAME correct uitgevoerd. De zeer grote stijfheidsverschillen zijn niet storend, omdat de zeer stijve delen zijn verbonden met de opleggingen.

In onderstaande uitvoer is de tabel voor snedegrootheden gecompriemd weergegeven.

SCIA Frame Studieverisie 03/04/1996 09:51:27 Opdracht 6a

```

Krachteenheid      : kN          Lengte-eenheid      : m
Aantal staven      : 3           Aantal veren       : 0
Aantal knopen      : 4           Aantal BG          : 1
Aantal randvwn.    : 2           Aantal BC          : 0
Scheefstand        : 0           Analyse type       : FL+GL
Eigen gewicht van de constructie : 1883999975491240000.00
    
```

Assen stelsel definitie :

0-----> X+  
 |  
 |            Positieve rotatie RY van Z+ naar X+  
 v Z+

## Knoop coördinaten

Knppnr	X	Z	Knppnr	X	Z
1	0.000	0.000	2	3.000	0.000
3	9.000	0.000	4	12.000	0.000

## Profiel Eigenschappen

Code	A	I	Neta	E	S.G.	R	Prof pos	Mat
A1	4.000E+015	1.000E-004	0.000E+000	2.100E+008	78.5	Y	A1	Staal
A2	4.000E-003	1.000E-004	0.000E+000	2.100E+008	78.5	Y	A2	Staal
A3	4.000E+015	1.000E-004	0.000E+000	2.100E+008	78.5	Y	A3	Staal

## Staaftopologie

Stf	Code	I	J	NVM	Lengte	dx/dz	excIx	excIz	excJx	excJz
1	A1	1	2	111 111	3.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
2	A2	2	3	111 111	6.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
3	A3	3	4	111 111	3.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00

## Randcondities

Knppnr	Cond	CX	CZ	CM
1	111			
4	111			

## Knooplasten

(Type : 1=Krachten , 2=Knoopverplaatsingen)

BG : 1 puntlast F

Knppnr	Type	Richting	Waarde
2	1	GX	100.00
3	1	GX	100.00

## Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
1	1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000	100.000	0.000	0.000
2	1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000	0.000	0.000
3	1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000	-100.000	0.000	0.000

## Knoopverplaatsingen per knoop voor BG

Knppnr	BG	UX	UZ	RY
1	1	0.000000	0.000000	0.000000
2	1	0.000000	0.000000	0.000000
3	1	0.000000	0.000000	0.000000
4	1	0.000000	0.000000	0.000000

## Reactiekrachten voor BG per knoop

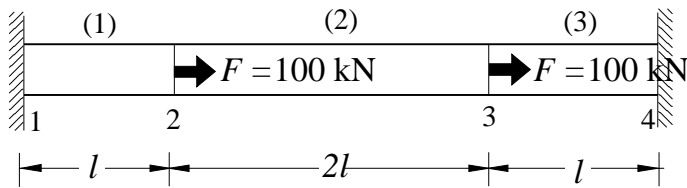
Knppnr	BG	FX	FZ	MY
1	1	-100.000	0.000	0.000
4	1	-100.000	0.000	0.000

## Totale evenwicht van de constructie per belastingsgeval

BG	Actie FX	React FX	Actie FZ	React FZ	Actie MY	React MY
1	200.000	-200.000	0.000	0.000	0.000	0.000

## Opdracht 6b





$$E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2 \quad I = 0,0001 \text{ m}^4$$

$$A1 = A3 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \quad A2 = 4 \cdot 10^{15} \text{ m}^2 \quad l = 3 \text{ m}$$

Het stelsel vergelijkingen kan nu niet worden opgelost. Het constructiedeel met de zeer grote stijfheid is niet verbonden met de opleggingen. De uitvoer bevat nu onzin. Met ‘nan’ wordt bedoeld ‘non acceptable number’.

In onderstaande uitvoer is de tabel voor snedegrootheden gecompriemd weergegeven.

SCIA Frame Studieverisie 03/04/1996 09:53:47 Opdracht 6b

```
Krachtenheid      : kN          Lengte-eenheid    : m
Aantal staven     : 3           Aantal veren      : 0
Aantal knopen     : 4           Aantal BG         : 1
Aantal randvwn.   : 2           Aantal BC         : 0
Scheefstand       : 0           Analyse type      : FL+GL
Eigen gewicht van de constructie : 1883999975491240000.00
```

```
Assen stelsel definitie :
0-----> X+
|
|          Positieve rotatie RY van Z+ naar X+
v Z+
```

```
Knoop coördinaten
Knpnr   X       Z       Knpnr   X       Z
-----
1       0.000   0.000   2       3.000   0.000
3       9.000   0.000   4      12.000   0.000
```

```
Profiel Eigenschappen
Code     A       I       Neta       E       S.G.  R  Prof pos  Mat
-----
A1  4.000E-003  1.000E-004  0.000E+000  2.100E+008  78.5  Y   A1   Staal
A2  4.000E+015  1.000E-004  0.000E+000  2.100E+008  78.5  Y   A2   Staal
A3  4.000E-003  1.000E-004  0.000E+000  2.100E+008  78.5  Y   A3   Staal
```

```
Staaftopologie
Stf Code  I   J   NVM   Lengte  dx/dz  excIx  excIz  excJx  excJz
-----
1  A1    1   2   111 111   3.00   999.99  0.00   0.00   0.00   0.00
2  A2    2   3   111 111   6.00   999.99  0.00   0.00   0.00   0.00
3  A3    3   4   111 111   3.00   999.99  0.00   0.00   0.00   0.00
```

```
Randcondities
Knp  Cond      CX      CZ      CM
-----
1    111
4    111
```

Knooplasten

(Type : 1=Krachten , 2=Knoopverplaatsingen)

BG : 1 puntlast F

Knppnr Type Richting Waarde

Knppnr	Type	Richting	Waarde
2	1	GX	100.00
3	1	GX	100.00

Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
1	1	0.000	-nan	-nan	-nan	-nan	-nan	-nan
2	1	0.000	-nan	-nan	-nan	-nan	-nan	-nan
3	1	0.000	-nan	-nan	-nan	-nan	-nan	-nan

Knoopverplaatsingen per knoop voor BG

Knppnr	BG	UX	UZ	RY
1	1	-nan	-nan	nan
2	1	-nan	-nan	nan
3	1	inf	0.000000	0.000000
4	1	0.000000	0.000000	0.000000

Reactiekrachten voor BG per knoop

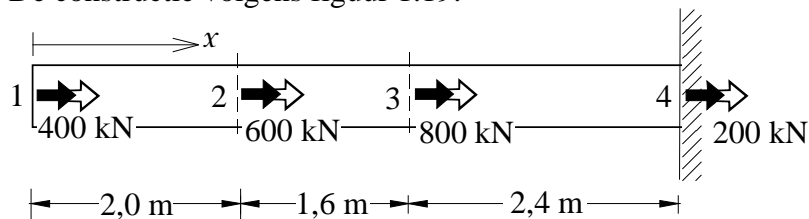
Knppnr	BG	FX	FZ	MY
1	1	-nan	-nan	nan
4	1	-nan	-nan	nan

Totale evenwicht van de constructie per belastingsgeval

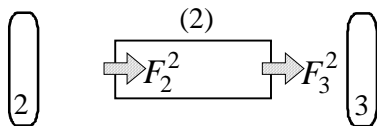
BG	Actie FX	React FX	Actie FZ	React FZ	Actie MY	React MY
1	200.000	-nan	0.000	-nan	0.000	nan

Uitvoer FOUT, oplossing niet OK : *instabiele constructie*.**Opdracht 7**

De constructie volgens figuur 1.19:

**Vraag a**

De staaf tussen knoop 2 en 3 wordt als volgt getekend:



Uit de uitvoer van de computerberekening blijkt voor element (2) :

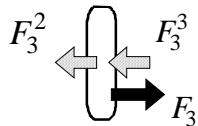
Staafrachten per staaf voor belastingsgevallen									
Stf	BG	Knp	FX	FZ	MY	Knp	FX	FZ	MY
2	1	2	1000.000	0.000	0.000	3	-1000.000	0.000	0.000

Controle op het evenwicht van element (2) levert :

$$\begin{aligned}
 F_2^2 &= +1000 \text{ kN} \\
 F_3^2 &= -1000 \text{ kN} \\
 \text{dus } \sum F_x &= F_2^2 + F_3^2 = +1000 \text{ kN} - 1000 \text{ kN} = 0
 \end{aligned}$$

Er is dus evenwicht.

**Vraag b**



Uit de uitvoer van de computerberekening blijkt voor de elementen waarin knoop 3 voorkomt:

Staafrachten per staaf voor belastingsgevallen									
Stf	BG	Knp	FX	FZ	MY	Knp	FX	FZ	MY
2	1	2	1000.000	0.000	0.000	3	-1000.000	0.000	0.000
3	1	3	1800.000	0.000	0.000	4	-1800.000	0.000	0.000

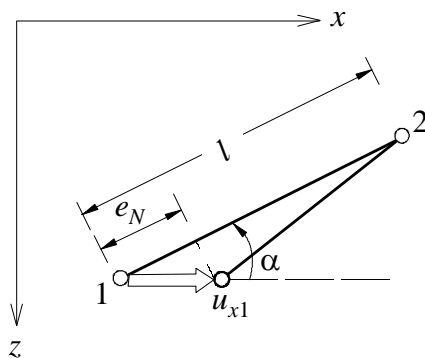
Evenwichtscntrole in knoop 3:

$$\begin{aligned}
 F_3 &= F_3^2 + F_3^3 = -1000 \text{ kN} + 1800 \text{ kN} = 800 \text{ kN} \quad (\text{berekend}) \\
 F_3 &= 800 \text{ kN} \quad (\text{ingevoerde belasting})
 \end{aligned}$$

De berekende waarde klopt met de ingevoerde belasting!



**Opdracht 1**



$$e_N = -\cos \alpha \cdot u_{x1}$$

$$N = D e_N = -D \cos \alpha u_{x1} \quad \text{met} \quad D = \frac{EA}{l}$$

Met vergelijking (2.2) uit het boek geeft dit:

$$\begin{cases} F_{x1} = -N \cos \alpha = D \cos^2 \alpha u_{x1} \\ F_{z1} = N \sin \alpha = -D \cos \alpha \sin \alpha u_{x1} \\ F_{x2} = N \cos \alpha = -D \cos^2 \alpha u_{x1} \\ F_{z2} = -N \sin \alpha = D \cos \alpha \sin \alpha u_{x1} \end{cases} \quad \text{met } u_{x1} = 1$$

Deze uitkomst komt overeen met de eerste kolom van de stijfheidsmatrix in vergelijking (2.4) van het boek.

**Opdracht 2**

$$\begin{cases} F_{x1} \\ F_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{z2} \end{cases} = D_N \begin{bmatrix} c^2 & -cs & -c^2 & cs \\ -cs & s^2 & cs & -s^2 \\ -c^2 & cs & c^2 & -cs \\ cs & -s^2 & -cs & s^2 \end{bmatrix} \begin{cases} u_{x1} \\ u_{z1} \\ u_{x2} \\ u_{z2} \end{cases} \quad \begin{cases} c = \cos \alpha \\ s = \sin \alpha \end{cases} \quad D_N = \frac{EA}{l}$$

Uitwerking voor  $\alpha = 0$  (horizontale staaf)

$$\begin{matrix} c = 1 \\ s = 0 \end{matrix} \quad \mathbf{K} = D_N \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \circ & \text{---} & \circ \\ 1 & & 2 \end{matrix}$$

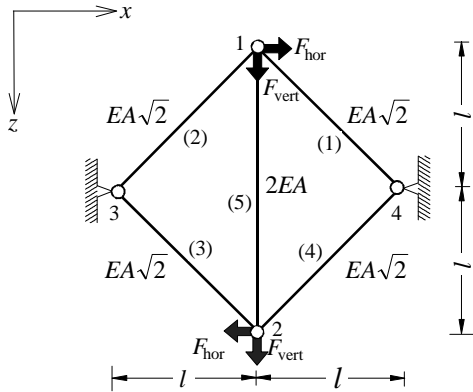
Constatering: Geen invloed van de verplaatsingen in de z-richting.  
Tweede en vierde kolom geheel gevuld met nullen.  
Idem tweede en vierde rij.

Uitwerking voor  $\alpha = \pi/2$  (vertikale staaf)

$$\begin{matrix} c = 0 \\ s = 1 \end{matrix} \quad \mathbf{K} = D_N \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \circ & 2 \\ \text{---} & \swarrow \alpha \\ \circ & 1 \end{matrix}$$

Constatering: Nu geen invloed van de verplaatsingen in de x-richting.

## Opdracht 3

**Vraag a**

Aantal vrijheidsgraden: Vier knopen; elk twee vrijheidsgraden. Totaal acht.

**Vraag b**

Aantal voorgeschreven verplaatsingen: Van twee knopen beide vrijheidsgraden verhinderd. Dus totaal vier.

**Vraag c**

Opstellen van globale stijfheidsmatrix

$$\mathbf{K} = D_N \begin{bmatrix} c^2 & -cs & -c^2 & cs \\ -cs & s^2 & cs & -s^2 \\ -c^2 & cs & c^2 & -cs \\ cs & -s^2 & -cs & s^2 \end{bmatrix}$$

Element 1:  $\alpha = -\frac{\pi}{4}$        $c = \frac{1}{2}\sqrt{2}$        $D_N = \frac{EA\sqrt{2}}{l\sqrt{2}} = \frac{EA}{l}$   
 $s = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Alleen linker bovenkwadrant gebruiken (want knoop 4 is oplegging)

$$\mathbf{K}^1 = D_N \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{z1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{z1} \end{pmatrix}$$

Element 2:  $\alpha = \frac{\pi}{4}$        $c = \frac{1}{2}\sqrt{2}$        $D_N = \frac{EA\sqrt{2}}{l\sqrt{2}} = \frac{EA}{l}$   
 $s = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Alleen rechter onderkwadrant gebruiken (want knoop 3 is oplegging)

$$\mathbf{K}^2 = D_N \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{z1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{z1} \end{pmatrix}$$

$$\text{Element 3:} \quad \alpha = -\frac{\pi}{4} \quad c = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad D_N = \frac{EA\sqrt{2}}{l\sqrt{2}} = \frac{EA}{l}$$

$$s = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Alleen rechter onderkwadrant gebruiken (want knoop 3 is oplegging)

$$\mathbf{K}^3 = D_N \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2} \\ u_{z2} \end{pmatrix}$$

$$(u_{x2})(u_{z2})$$

$$\text{Element 4:} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \quad c = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad D_N = \frac{EA\sqrt{2}}{l\sqrt{2}} = \frac{EA}{l}$$

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Alleen linker bovenkwadrant gebruiken (want knoop 4 is oplegging)

$$\mathbf{K}^4 = D_N \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{x2} \\ u_{z2} \end{pmatrix}$$

$$(u_{x2})(u_{z2})$$

$$\text{Element 5:} \quad \alpha = -\frac{\pi}{2} \quad c = 0 \quad D = \frac{2EA}{2l} = \frac{EA}{l}$$

$$s = -1$$

Voor dit element de gehele matrix gebruiken

$$\mathbf{K}^5 = D_N \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{z1} \\ u_{x2} \\ u_{z2} \end{pmatrix}$$

$$(u_{x1})(u_{z1})(u_{x2})(u_{z2})$$

We constateren dat alle vijf elementmatrices dezelfde factor  $D_N$  hebben.

Assemblage tot totale matrix:

$$D_N \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{z1} \\ u_{x2} \\ u_{z2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{z2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}u = \mathbf{f}$$

### Vraag d

Uitsluitend verticale krachten in knoop 1 en 2 geeft om redenen van symmetrie:

$$u_{x1} = 0$$

$$u_{x2} = 0$$

**Vraag e**

$$\text{Belasting: } \mathbf{f} = \{0, F_{\text{vert}}, 0, F_{\text{vert}}\}^T$$

$$\text{Oplossing: } \mathbf{u} = \left\{0, \frac{F_{\text{vert}}}{D_N}, 0, \frac{F_{\text{vert}}}{D_N}\right\}^T$$

De uitkomst komt overeen met de verwachting van *vraag d*.

**Vraag f**

Bij tegengestelde evengrote horizontale krachten ontstaat in de symmetrische constructie een antimetrische krachtsverdeling en dito verplaatsingsveld. Dan zal gelden

$$u_{z1} = u_{z2} = 0$$

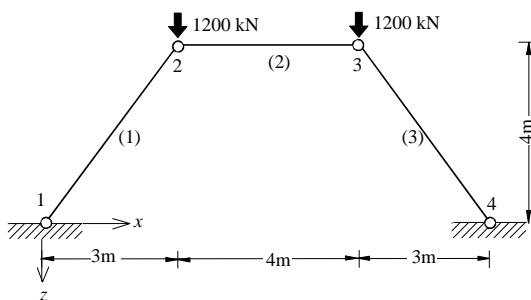
$$u_{x1} = -u_{x2}$$

**Vraag g**

$$\text{Belasting: } \mathbf{f} = \{F_{\text{hor}}, 0, -F_{\text{hor}}, 0\}^T$$

$$\text{Oplossing: } \mathbf{u} = \left\{\frac{F_{\text{hor}}}{D_N}, 0, -\frac{F_{\text{hor}}}{D_N}, 0\right\}^T$$

De uitkomst komt overeen met de verwachting van *vraag f*.

**Opdracht 4**

$$E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$A = 0,08 \text{ m}^2$$

**Vraag a**

De berekening is uitgevoerd met het programma FRAME. De oorsprong van het assenstelsel  $x, z$  valt samen met knoop 1. De  $x$ -as loopt naar rechts, de  $z$ -as naar beneden. Alle drie staven krijgen bij de staftopologie de code 110. Van alle knopen moet dan de rotatie worden voorgeschreven.

In de onderstaande uitvoer is de tabel snedegrootheden gecompriemd weergegeven. Met 'nan' wordt bedoeld 'non acceptable number' en 'inf' staat voor 'infinite number'.



SCIA Frame Studieverisie 03/04/1996 09:59:29 Opdracht 4

Krachtenheid : kN Lengte-eenheid : m  
 Aantal staven : 3 Aantal veren : 0  
 Aantal knopen : 4 Aantal BG : 1  
 Aantal randvwn. : 4 Aantal BC : 0  
 Scheefstand : 0 Analyse type : FL+GL  
 Eigen gewicht van de constructie : 28.00

Assen stelsel definitie :

0-----> X+  
 |  
 | Positieve rotatie RY van Z+ naar X+  
 v Z+

Knoop coördinaten

Knpnr	X	Z	Knpnr	X	Z
1	0.000	0.000	2	3.000	-4.000
3	7.000	-4.000	4	10.000	0.000

Profiel Eigenschappen

Code	A	I	Neta	E	S.G.	R	Prof pos	Mat
A1	8.000E-002	1.000E+000	0.000E+000	3.000E+007	25.0	Y	A1	Beton

Staaftopologie

Stf	Code	I	J	NVM	Lengte	dx/dz	excIx	excIz	excJx	excJz
1	A1	1	2	110 110	5.00	-0.75	0.00	0.00	0.00	0.00
2	A1	2	3	110 110	4.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
3	A1	3	4	110 110	5.00	0.75	0.00	0.00	0.00	0.00

Randcondities

Knp	Cond	CX	CZ	CM
1	111			
2	001			
3	001			
4	111			

Knooplasten (Type : 1=Krachten , 2=Knoopverplaatsingen)

BG : 1 puntlast F

Knpnr	Type	Richting	Waarde
2	1	GZ	1200.00
3	1	GZ	1200.00

Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
1	1	0.000	-nan	-nan	-nan	-nan	-nan	-nan
2	1	0.000	-nan	-nan	-nan	-nan	-nan	-nan
3	1	0.000	-nan	-nan	-nan	-nan	-nan	-nan

Knoopverplaatsingen per knoop voor BG

Knpnr	BG	UX	UZ	RY
1	1	-nan	-nan	nan
2	1	-nan	-nan	nan
3	1	-nan	-nan	nan
4	1	-nan	-nan	-inf

Reactiekrachten voor BG per knoop

Knpnr	BG	FX	FZ	MY
1	1	-nan	-nan	nan
2	1	-nan	-nan	nan

3	1	-nan	-nan	nan
4	1	-nan	-nan	nan

Totale evenwicht van de constructie per belastingsgeval

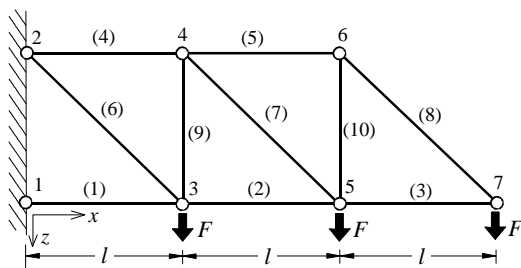
BG	Actie FX	React FX	Actie FZ	React FZ	Actie MY	React MY
1	0.000	-nan	2400.000	-nan	-12000.000	nan

### Vraag b

Constatering: Het programma breekt af. Oplossen van het stelsel vergelijkingen is niet mogelijk. Het stelsel is niet goed geconditioneerd omdat de constructie niet vormvast is. Het programma FRAME stopt na de foutmelding 'Constructie is instabiel'. De uitvoer is nu zonder betekenis.

## Opdracht 5

### Vraag a



$$l = 4 \text{ m}$$

$$E = 2 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$$

$$AH = A_{\text{hor}} = 0,002 \text{ m}^2$$

$$AV = A_{\text{vert}} = 0,001 \text{ m}^2$$

$$AD = A_{\text{diag}} = 0,0005 \text{ m}^2$$

$$F = 50 \text{ kN}$$

De berekening is uitgevoerd met het programma FRAME.

De oorsprong van het globale assenstelsel ligt in knoop 1. De  $x$ -as loopt naar rechts, de  $z$ -as naar beneden. Alle staven krijgen bij de staaftopologie de code 110 aan beide einden. Dan moeten alle knooprotoaties worden voorgeschreven.

In de onderstaande uitvoer is de tabel snedegrootheden gecompriemd weergegeven.

SCIA Frame Studieverisie 03/04/1996 10:01:35 Opdracht 5

```

Krachteenheid      : kN          Lengte-eenheid      : m
Aantal staven      : 10          Aantal veren       : 0
Aantal knopen      : 7           Aantal BG          : 1
Aantal randvwn.    : 7           Aantal BC          : 0
Scheefstand        : 0           Analyse type       : FL+GL
Eigen gewicht van de constructie : 4.43

```

Assen stelsel definitie :

```

0-----> X+
|
|           Positieve rotatie RY van Z+ naar X+
v Z+

```

Knoop coördinaten

Knpnr	X	Z	Knpnr	X	Z
1	0.000	0.000	2	0.000	-4.000
3	4.000	0.000	4	4.000	-4.000
5	8.000	0.000	6	8.000	-4.000

7 12.000 0.000

Profiel Eigenschappen

Code	A	I	Neta	E	S.G.	R	Prof pos	Mat
AH	2.000E-003	1.000E-004	0.000E+000	2.000E+008	78.5	Y	AH	Staal
AD	5.000E-004	1.000E-004	0.000E+000	2.000E+008	78.5	Y	AD	Staal
AV	1.000E-003	1.000E-004	0.000E+000	2.000E+008	78.5	Y	AV	Staal

Staaftopologie

Stf	Code	I	J	NVM	Lengte	dx/dz	excIx	excIz	excJx	excJz
				<I>-<J>						
1	AH	1	3	110 110	4.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
2	AH	3	5	110 110	4.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
3	AH	5	7	110 110	4.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
4	AH	2	4	110 110	4.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
5	AH	4	6	110 110	4.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
6	AD	2	3	110 110	5.66	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7	AD	4	5	110 110	5.66	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
8	AD	6	7	110 110	5.66	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9	AV	3	4	110 110	4.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	AV	5	6	110 110	4.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Randcondities

Knpr	Cond	CX	CZ	CM
1	111			
2	111			
3	001			
4	001			
5	001			
6	001			
7	001			

Knooplasten (Type : 1=Krachten , 2=Knoopverplaatsingen) BG: 1 puntlast F

Knprnr	Type	Richting	Waarde
3	1	GZ	50.00
5	1	GZ	50.00
7	1	GZ	50.00

Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
1	1	0.000	0.000000	0.000000	0.004993	-299.999	0.000	0.000
2	1	0.000	-0.003000	0.019971	0.004828	-150.000	0.000	0.000
3	1	0.000	-0.004500	0.039284	0.003414	-50.000	0.000	0.000
4	1	0.000	0.000000	0.000000	0.005493	150.000	0.000	0.000
5	1	0.000	0.001500	0.021971	0.004578	50.000	0.000	0.000
6	1	0.000	0.000000	0.000000	0.002871	212.132	0.000	0.000
7	1	0.000	0.016596	0.014475	0.002914	141.421	0.000	0.000
8	1	0.000	0.029900	0.027071	0.002457	70.711	0.000	0.000
9	1	0.000	-0.019971	-0.003000	0.001125	-100.000	0.000	0.000
10	1	0.000	-0.039284	-0.004500	0.001625	-50.000	0.000	0.000

Knoopverplaatsingen per knoop voor BG

Knprnr	BG	UX	UZ	RY
1	1	0.000000	0.000000	0.000000
2	1	0.000000	0.000000	0.000000
3	1	-0.003000	0.019971	0.000000
4	1	0.001500	0.021971	0.000000
5	1	-0.004500	0.039284	0.000000
6	1	0.002000	0.040284	0.000000
7	1	-0.005000	0.052941	0.000000

Reactiekrachten voor BG per knoop

Knprnr	BG	FX	FZ	MY
1	1	300.000	0.000	0.000

---

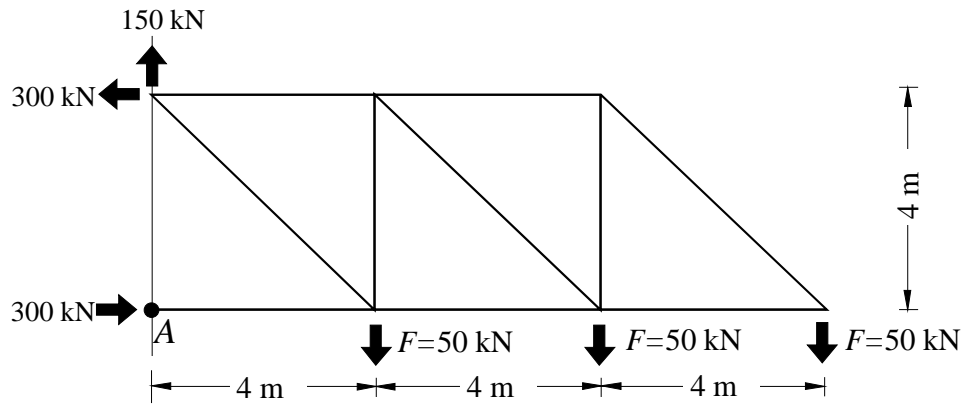
2	1	-300.000	-150.000	0.000
3	1	0.000	0.000	0.000
4	1	0.000	0.000	0.000
5	1	0.000	0.000	0.000
6	1	0.000	0.000	0.000
7	1	0.000	0.000	0.000

Totale evenwicht van de constructie per belastingsgeval

BG	Actie FX	React FX	Actie FZ	React FZ	Actie MY	React MY
1	0.000	0.000	150.000	-150.000	-1200.000	1200.000

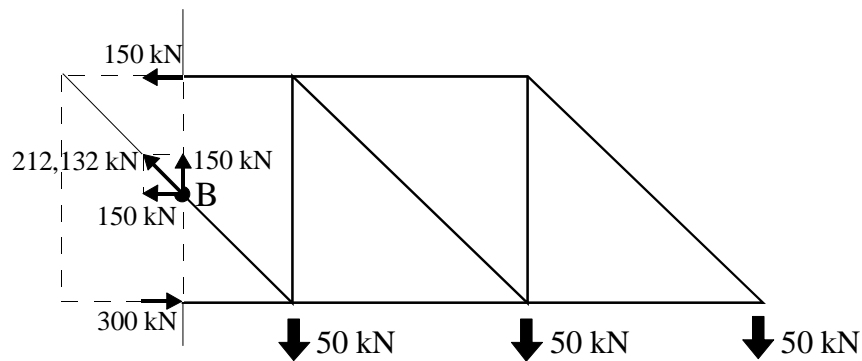
**Vraag b**

Controle oplegreacties



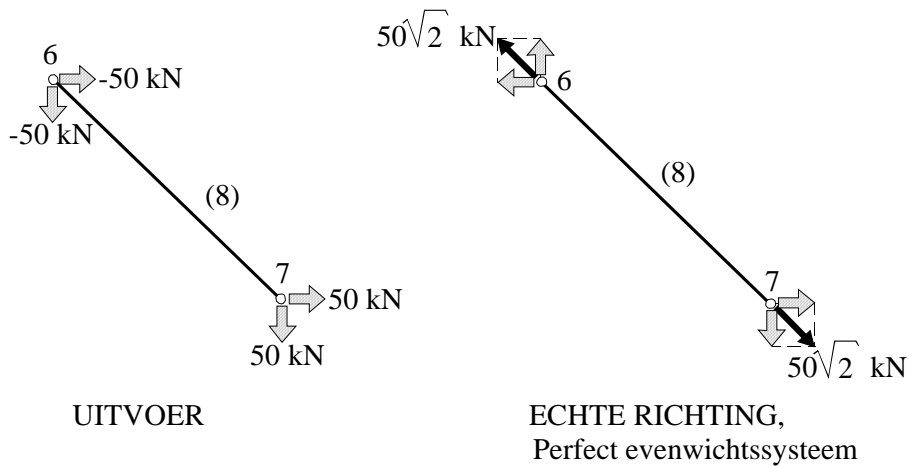
$$\begin{aligned} \sum F_x &= -300 + 300 = 0 \\ \sum F_z &= -150 + 50 + 50 + 50 = 0 \\ \sum T_y|_A &= -300 \times 4 + 50 \times 4 + \\ &\quad 50 \times 8 + 50 \times 12 = 0 \end{aligned}$$

**Vraag c**

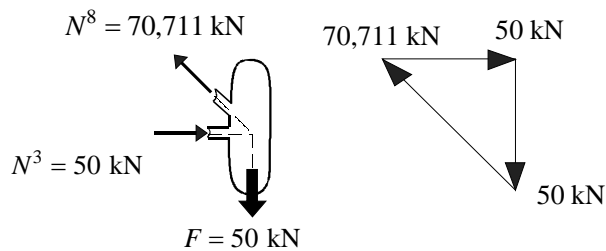


$$\begin{aligned} \sum F_x &= -150 - 150 + 300 = 0 \\ \sum F_z &= -150 + 50 + 50 + 50 = 0 \\ \sum T_y|_B &= -2 \times 150 - 2 \times 300 + 2 \times 50 + \\ &\quad 6 \times 50 + 10 \times 50 = 0 \end{aligned}$$

**Vraag d**



**Vraag e**



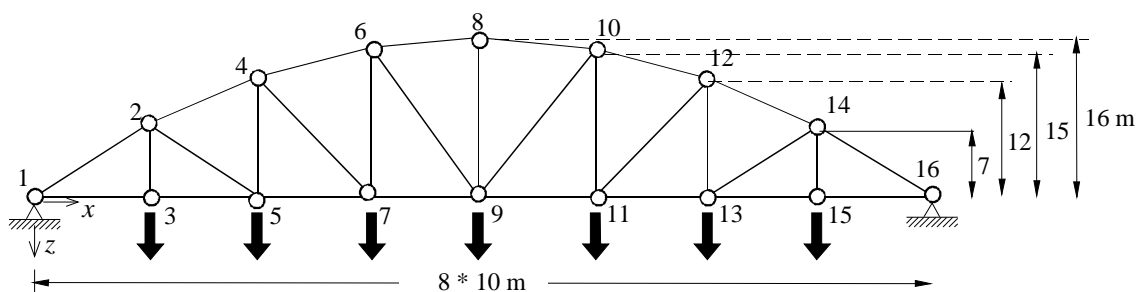
De knoop is perfect in evenwicht

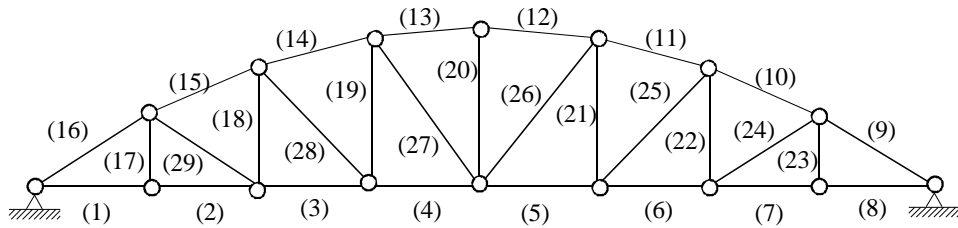
**Vraag f**

Als de  $z$ -as van richting verandert, wijzigt de invoer als volgt:

- Alle  $z$ -coördinaten van de knopen veranderen van teken.
- De drie krachten ter grootte van 50 kN veranderen van teken.

**Opdracht 6**





$$\begin{aligned}
 E = E &= 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2 & AV = A_{\text{vert}} &= 0,0024 \text{ mm}^2 \\
 AB = A_{\text{boog}} &= 0,048 \text{ m}^2 & AD = A_{\text{diag}} &= 0,004 \text{ m}^2 \\
 AR = A_{\text{rijdek}} &= 0,024 \text{ m}^2 & F = F &= 1000 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

**Vraag a**

De berekening is uitgevoerd met het programma FRAME. De oorsprong van het globale assenstelsel valt samen met de linker oplegging. De x-as loopt naar rechts, de z-as naar beneden. Knopen 1 en 16 zijn scharnierend opgelegd. Alle staven krijgen bij de staaftopologie de code 110 aan beide eindigen. Dan moeten alle knooprotoaties worden voorgeschreven.

In onderstaande uitvoer is de tabel snedegrootheden gecomprimeerd weergegeven.

SCIA Frame Studieverisie 03/04/1996 10:15:05 Opdracht 6a

```

Krachteenheid      : kN          Lengte-eenheid      : m
Aantal staven      : 29          Aantal veren        : 0
Aantal knopen      : 16          Aantal BG           : 1
Aantal randvwn.    : 16          Aantal BC           : 0
Scheefstand        : 0           Analyse type        : FL+GL
Eigen gewicht van de constructie : 526.00
    
```

```

Assen stelsel definitie :
0-----> X+
|
|          Positieve rotatie RY van Z+ naar X+
v Z+
    
```

Knoop coördinaten					
Knpnr	X	Z	Knpnr	X	Z
1	0.000	0.000	2	10.000	-7.000
3	10.000	0.000	4	20.000	-12.000
5	20.000	0.000	6	30.000	-15.000
7	30.000	0.000	8	40.000	-16.000
9	40.000	0.000	10	50.000	-15.000
11	50.000	0.000	12	60.000	-12.000
13	60.000	0.000	14	70.000	-7.000
15	70.000	0.000	16	80.000	0.000

Profiel Eigenschappen									
Code	A	I	Neta	E	S.G.	R	Prof pos	Mat	
AR	2.400E-002	1.000E+000	0.000E+000	2.100E+008	78.5	Y	AR	Staal	
AB	4.800E-002	1.000E+000	0.000E+000	2.100E+008	78.5	Y	AB	Staal	
AV	2.400E-003	1.000E+000	0.000E+000	2.100E+008	78.5	Y	AV	Staal	
AD	4.000E-003	1.000E+000	0.000E+000	2.100E+008	78.5	Y	AD	Staal	

## Staaftopologie

Stf	Code	I	J	NVM		Lengte	dx/dz	excIx	excIz	excJx	excJz
				<I>	<J>						
1	AR	1	3	110	110	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
2	AR	3	5	110	110	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
3	AR	5	7	110	110	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
4	AR	7	9	110	110	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
5	AR	9	11	110	110	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
6	AR	11	13	110	110	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
7	AR	13	15	110	110	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
8	AR	15	16	110	110	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
9	AB	14	16	110	110	12.21	1.43	0.00	0.00	0.00	0.00
10	AB	12	14	110	110	11.18	2.00	0.00	0.00	0.00	0.00
11	AB	10	12	110	110	10.44	3.33	0.00	0.00	0.00	0.00
12	AB	8	10	110	110	10.05	10.00	0.00	0.00	0.00	0.00
13	AB	6	8	110	110	10.05	-10.00	0.00	0.00	0.00	0.00
14	AB	4	6	110	110	10.44	-3.33	0.00	0.00	0.00	0.00
15	AB	2	4	110	110	11.18	-2.00	0.00	0.00	0.00	0.00
16	AB	1	2	110	110	12.21	-1.43	0.00	0.00	0.00	0.00
17	AV	2	3	110	110	7.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
18	AV	4	5	110	110	12.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
19	AV	6	7	110	110	15.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
20	AV	8	9	110	110	16.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
21	AV	10	11	110	110	15.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
22	AV	12	13	110	110	12.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
23	AV	14	15	110	110	7.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
24	AD	2	5	110	110	12.21	1.43	0.00	0.00	0.00	0.00
25	AD	4	7	110	110	15.62	0.83	0.00	0.00	0.00	0.00
26	AD	6	9	110	110	18.03	0.67	0.00	0.00	0.00	0.00
27	AD	9	10	110	110	18.03	-0.67	0.00	0.00	0.00	0.00
28	AD	11	12	110	110	15.62	-0.83	0.00	0.00	0.00	0.00
29	AD	13	14	110	110	12.21	-1.43	0.00	0.00	0.00	0.00

## Randcondities

Knp	Cond	CX	CZ	CM
1	111			
2	001			
3	001			
4	001			
5	001			
6	001			
7	001			
8	001			
9	001			
10	001			
11	001			
12	001			
13	001			
14	001			
15	001			
16	111			

## Knooplasten

(Type : 1=Krachten , 2=Knoopverplaatsingen)

BG : 1 puntlast F

Knpr	Type	Richting	Waarde
3	1	GZ	1000.00
5	1	GZ	1000.00
7	1	GZ	1000.00
9	1	GZ	1000.00
11	1	GZ	1000.00
13	1	GZ	1000.00
15	1	GZ	1000.00



Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
1	1	0.000	0.000000	0.000000	0.005732	0.001	0.000	0.000
2	1	0.000	0.000000	0.057321	0.001666	0.001	0.000	0.000
3	1	0.000	0.000000	0.073976	-0.000896	0.001	0.000	0.000
4	1	0.000	0.000000	0.065013	-0.002463	0.001	0.000	0.000
5	1	0.000	0.000000	0.040382	0.002463	0.001	0.000	0.000
6	1	0.000	0.000000	0.065013	0.000896	0.001	0.000	0.000
7	1	0.000	0.000000	0.073976	-0.001666	0.001	0.000	0.000
8	1	0.000	0.000000	0.057321	-0.005732	0.001	0.000	0.000
9	1	0.000	0.007391	0.047842	-0.003919	-6103.166	0.000	0.000
10	1	0.000	0.006500	0.052838	-0.000396	-5590.058	0.000	0.000
11	1	0.000	0.002758	0.035976	0.001647	-5220.041	0.000	0.000
12	1	0.000	0.000859	0.008593	0.002711	-5024.826	0.000	0.000
13	1	0.000	0.004151	0.035842	-0.002711	-5024.826	0.000	0.000
14	1	0.000	0.002649	0.053170	-0.001647	-5220.041	0.000	0.000
15	1	0.000	-0.000300	0.048409	0.000396	-5590.058	0.000	0.000
16	1	0.000	0.000000	0.000000	0.003919	-6103.166	0.000	0.000
17	1	0.000	0.043432	-0.021381	0.003054	999.998	0.000	0.000
18	1	0.000	0.050167	-0.017816	0.001485	999.999	0.000	0.000
19	1	0.000	0.035251	-0.007696	0.000513	999.999	0.000	0.000
20	1	0.000	0.008636	0.000000	0.000000	999.999	0.000	0.000
21	1	0.000	0.035251	0.007696	-0.000513	999.999	0.000	0.000
22	1	0.000	0.050167	0.017816	-0.001485	999.999	0.000	0.000
23	1	0.000	0.043432	0.021381	-0.003054	999.998	0.000	0.000
24	1	0.000	0.042423	0.023320	0.003054	0.000	0.000	0.000
25	1	0.000	0.049945	0.018429	0.001485	0.000	0.000	0.000
26	1	0.000	0.033600	0.013150	0.000513	0.000	0.000	0.000
27	1	0.000	-0.033600	0.022400	-0.000513	0.000	0.000	0.000
28	1	0.000	-0.049945	0.041620	-0.001485	0.000	0.000	0.000
29	1	0.000	-0.042423	0.060604	-0.003054	0.000	0.000	0.000

Knoopverplaatsingen per knoop voor BG

Knpr	BG	UX	UZ	RY
1	1	0.000000	0.000000	0.000000
2	1	0.021381	0.043432	0.000000
3	1	0.000000	0.057321	0.000000
4	1	0.017816	0.050167	0.000000
5	1	0.000000	0.073976	0.000000
6	1	0.007696	0.035251	0.000000
7	1	0.000000	0.065013	0.000000
8	1	0.000000	0.008636	0.000000
9	1	0.000000	0.040382	0.000000
10	1	-0.007696	0.035251	0.000000
11	1	0.000000	0.065013	0.000000
12	1	-0.017816	0.050167	0.000000
13	1	0.000000	0.073976	0.000000
14	1	-0.021381	0.043432	0.000000
15	1	0.000000	0.057321	0.000000
16	1	0.000000	0.000000	0.000000

Reactiekrachten voor BG per knoop

Knpr	BG	FX	FZ	MY
1	1	4999.999	-3500.000	0.000
2	1	0.000	0.000	0.000
3	1	0.000	0.000	0.000
4	1	0.000	0.000	0.000
5	1	0.000	0.000	0.000
6	1	0.000	0.000	0.000
7	1	0.000	0.000	0.000
8	1	0.000	0.000	0.000
9	1	0.000	0.000	0.000
10	1	0.000	0.000	0.000
11	1	0.000	0.000	0.000
12	1	0.000	0.000	0.000
13	1	0.000	0.000	0.000
14	1	0.000	0.000	0.000

15	1	0.000	0.000	0.000
16	1	-4999.999	-3500.000	0.000

Totale evenwicht van de constructie per belastingsgeval

BG	Actie FX	React FX	Actie FZ	React FZ	Actie MY	React MY
1	0.000	0.000	7000.000	-7000.000	-280000.000	280000.000

Normaalkrachten [kN]

### Vraag b

Alle diagonaalstaven blijken nulstaven te zijn. De krachten  $F$  worden direct door de verticale hangers naar de boog geleid. De druklijn bij de zeven krachten  $F$  valt samen met de boog. Door de wijze van opleggen geeft de boog zijn horizontale krachtencomponent direct af aan de opleggingen. Daardoor is ook de normaalkracht in alle horizontale staven (het rijdek) nul.

### Vraag c

Knoop 1 is een scharnieroplegging en knoop 16 is een roloplegging.

In onderstaande uitvoer is de tabel snedegrootheden gecomprimeerd weergegeven.

SCIA Frame Studieverisie 03/04/1996 10:17:42 Opdracht 6c

```

Krachteenheid      : kN          Lengte-eenheid      : m
Aantal staven      : 29          Aantal veren       : 0
Aantal knopen      : 16          Aantal BG          : 1
Aantal randvwn.    : 16          Aantal BC          : 0
Scheefstand        : 0           Analyse type       : FL+GL
Eigen gewicht van de constructie : 526.00

```

Assen stelsel definitie :

```

0-----> X+
|
|          Positieve rotatie RY van Z+ naar X+
v Z+

```

Knoop coördinaten

Knppnr	X	Z	Knppnr	X	Z
1	0.000	0.000	2	10.000	-7.000
3	10.000	0.000	4	20.000	-12.000
5	20.000	0.000	6	30.000	-15.000
7	30.000	0.000	8	40.000	-16.000
9	40.000	0.000	10	50.000	-15.000
11	50.000	0.000	12	60.000	-12.000
13	60.000	0.000	14	70.000	-7.000
15	70.000	0.000	16	80.000	0.000

Profiel Eigenschappen

Code	A	I	Neta	E	S.G.	R	Prof pos	Mat
AR	2.400E-002	1.000E+000	0.000E+000	2.100E+008	78.5	Y	AR	Staal
AB	4.800E-002	1.000E+000	0.000E+000	2.100E+008	78.5	Y	AB	Staal
AV	2.400E-003	1.000E+000	0.000E+000	2.100E+008	78.5	Y	AV	Staal
AD	4.000E-003	1.000E+000	0.000E+000	2.100E+008	78.5	Y	AD	Staal

Staaftopologie

Stf	Code	I	J	NVM	Lengte	dx/dz	excIx	excIz	excJx	excJz
1	AR	1	3	110 110	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
2	AR	3	5	110 110	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
3	AR	5	7	110 110	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
4	AR	7	9	110 110	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
5	AR	9	11	110 110	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
6	AR	11	13	110 110	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
7	AR	13	15	110 110	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
8	AR	15	16	110 110	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
9	AB	14	16	110 110	12.21	1.43	0.00	0.00	0.00	0.00
10	AB	12	14	110 110	11.18	2.00	0.00	0.00	0.00	0.00
11	AB	10	12	110 110	10.44	3.33	0.00	0.00	0.00	0.00
12	AB	8	10	110 110	10.05	10.00	0.00	0.00	0.00	0.00
13	AB	6	8	110 110	10.05	-10.00	0.00	0.00	0.00	0.00
14	AB	4	6	110 110	10.44	-3.33	0.00	0.00	0.00	0.00
15	AB	2	4	110 110	11.18	-2.00	0.00	0.00	0.00	0.00
16	AB	1	2	110 110	12.21	-1.43	0.00	0.00	0.00	0.00
17	AV	2	3	110 110	7.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
18	AV	4	5	110 110	12.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
19	AV	6	7	110 110	15.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
20	AV	8	9	110 110	16.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
21	AV	10	11	110 110	15.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
22	AV	12	13	110 110	12.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
23	AV	14	15	110 110	7.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
24	AD	2	5	110 110	12.21	1.43	0.00	0.00	0.00	0.00
25	AD	4	7	110 110	15.62	0.83	0.00	0.00	0.00	0.00
26	AD	6	9	110 110	18.03	0.67	0.00	0.00	0.00	0.00
27	AD	9	10	110 110	18.03	-0.67	0.00	0.00	0.00	0.00
28	AD	11	12	110 110	15.62	-0.83	0.00	0.00	0.00	0.00
29	AD	13	14	110 110	12.21	-1.43	0.00	0.00	0.00	0.00

Randcondities

Knppnr	Cond	CX	CZ	CM
1	111			
2	001			
3	001			
4	001			
5	001			
6	001			
7	001			
8	001			
9	001			
10	001			
11	001			
12	001			
13	001			
14	001			

15 001  
16 011

## Knooplasten

(Type : 1=Krachten , 2=Knoopverplaatsingen)

BG : 1 puntlast F

Knprnr	Type	Richting	Waarde
3	1	GZ	1000.00
5	1	GZ	1000.00
7	1	GZ	1000.00
9	1	GZ	1000.00
11	1	GZ	1000.00
13	1	GZ	1000.00
15	1	GZ	1000.00

## Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
1	1	0.000	0.000000	0.000000	0.010055	4999.944	0.000	0.000
2	1	0.000	0.009921	0.100547	0.003154	4999.944	0.000	0.000
3	1	0.000	0.019841	0.132083	-0.000235	4999.944	0.000	0.000
4	1	0.000	0.029762	0.129734	-0.002463	4999.944	0.000	0.000
5	1	0.000	0.039683	0.105103	0.002463	4999.944	0.000	0.000
6	1	0.000	0.049603	0.129734	0.000235	4999.944	0.000	0.000
7	1	0.000	0.059524	0.132083	-0.003154	4999.944	0.000	0.000
8	1	0.000	0.069444	0.100547	-0.010055	4999.944	0.000	0.000
9	1	0.000	0.072409	0.055093	-0.008242	-6103.166	0.000	0.000
10	1	0.000	0.069754	0.086176	-0.001884	-5590.058	0.000	0.000
11	1	0.000	0.059364	0.086564	0.000986	-5220.041	0.000	0.000
12	1	0.000	0.046785	0.069044	0.002711	-5024.826	0.000	0.000
13	1	0.000	0.037196	0.104190	-0.002711	-5024.826	0.000	0.000
14	1	0.000	0.022061	0.119659	-0.000986	-5220.041	0.000	0.000
15	1	0.000	0.007432	0.100603	0.001884	-5590.058	0.000	0.000
16	1	0.000	0.000000	0.000000	0.008242	-6103.166	0.000	0.000
17	1	0.000	0.086658	-0.051639	0.005960	999.998	0.000	0.000
18	1	0.000	0.108273	-0.055514	0.002973	999.999	0.000	0.000
19	1	0.000	0.099972	-0.047379	0.001174	999.999	0.000	0.000
20	1	0.000	0.073357	-0.039683	0.000000	999.999	0.000	0.000
21	1	0.000	0.099972	-0.031986	-0.001174	999.999	0.000	0.000
22	1	0.000	0.108273	-0.023851	-0.002973	999.999	0.000	0.000
23	1	0.000	0.086658	-0.027726	-0.005960	999.998	0.000	0.000
24	1	0.000	0.091999	0.041380	0.004542	0.000	0.000	0.000
25	1	0.000	0.118717	0.026668	0.002146	0.000	0.000	0.000
26	1	0.000	0.109463	0.016033	0.000513	0.000	0.000	0.000
27	1	0.000	-0.065439	0.091318	-0.000513	0.000	0.000	0.000
28	1	0.000	-0.067909	0.121160	-0.002146	0.000	0.000	0.000
29	1	0.000	-0.026981	0.142341	-0.004542	0.000	0.000	0.000

## Knoopverplaatsingen per knoop voor BG

Knprnr	BG	UX	UZ	RY
1	1	0.000000	0.000000	0.000000
2	1	0.051639	0.086658	0.000000
3	1	0.009921	0.100547	0.000000
4	1	0.055514	0.108273	0.000000
5	1	0.019841	0.132083	0.000000
6	1	0.047379	0.099972	0.000000
7	1	0.029762	0.129734	0.000000
8	1	0.039683	0.073357	0.000000
9	1	0.039683	0.105103	0.000000
10	1	0.031986	0.099972	0.000000
11	1	0.049603	0.129734	0.000000
12	1	0.023851	0.108273	0.000000
13	1	0.059524	0.132083	0.000000
14	1	0.027726	0.086658	0.000000
15	1	0.069444	0.100547	0.000000
16	1	0.079365	0.000000	0.000000

Reactiekrachten voor BG per knoop

Kn timer	BG	FX	FZ	MY
1	1	0.000	-3500.000	0.000
2	1	0.000	0.000	0.000
3	1	0.000	0.000	0.000
4	1	0.000	0.000	0.000
5	1	0.000	0.000	0.000
6	1	0.000	0.000	0.000
7	1	0.000	0.000	0.000
8	1	0.000	0.000	0.000
9	1	0.000	0.000	0.000
10	1	0.000	0.000	0.000
11	1	0.000	0.000	0.000
12	1	0.000	0.000	0.000
13	1	0.000	0.000	0.000
14	1	0.000	0.000	0.000
15	1	0.000	0.000	0.000
16	1	0.000	-3500.000	0.000

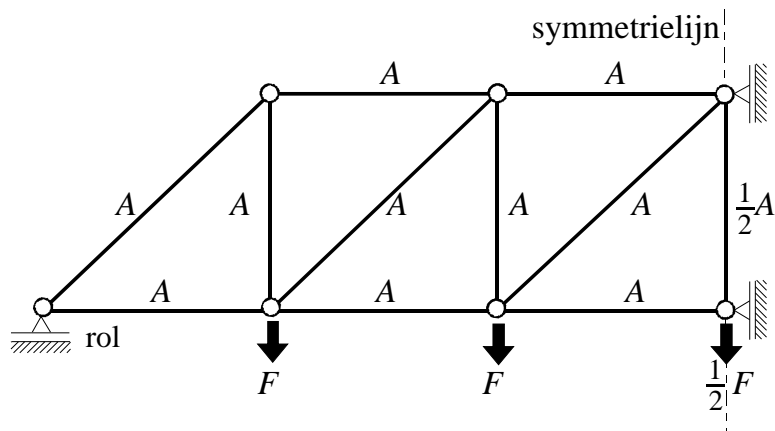
Totale evenwicht van de constructie per belastingsgeval

BG	Actie FX	React FX	Actie FZ	React FZ	Actie MY	React MY
1	0.000	0.000	7000.000	-7000.000	-280000.000	280000.000

Als rechts een rolplegging wordt gemaakt, moet de horizontale onderrand fungeren als trekband. Alle normaalkrachten in deze onderrand hebben de grootte 5000 kN.

Normaalkrachten [kN]

## Opdracht 7



De kracht  $F$  in de symmetrieliijn doet nu voor de helft mee. Dat geldt ook voor de doorsnede  $A$  van de verticale staaf die samenvalt met de symmetrie-lijn. De twee knopen in de verticale symmetrieliijn kunnen niet horizontaal verplaatsen.

De linker oplegging moet nu een rol worden om verlenging van de onderrand mogelijk te maken.

## Opdracht 1

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & & & \\ -2 & 6 & -4 & & \\ & -4 & 10 & -6 & \\ & & -6 & 12 & -6 \\ & & & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2^o \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 + F_2^o \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 + F_5^o \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} F_1 = F_2 = 8 \text{ kN} & & u_2^o = 0,5 \text{ m} \\ F_3 = 0,8 \text{ kN} & & u_5^o = 0 \\ F_4 = F_5 = 0 & & \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ 0,5 \\ u_3 \\ u_4 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 8 + F_2^o \\ 0,8 \\ 0 \\ F_5^o \end{Bmatrix}$$

De voorgeschreven verplaatsing  $u_2^o$  is ongelijk nul. Daarom moet de tweede kolom worden vermenigvuldigd met de waarde 0,5 en worden afgetrokken van het rechterlid. De componenten in het rechterlid worden hierdoor:

$$\mathbf{f} = \{9 \quad 5 + F_2^o \quad 2,8 \quad 0 \quad F_5^o\}^T$$

Voor de voorgeschreven verplaatsing  $u_5^o$  is deze handeling niet nodig omdat deze de waarde nul heeft.

Vervolgens worden de tweede rij en tweede kolom en ook de vijfde rij en vijfde kolom gevuld met nullen, behalve op de hoofddiagonaal waar een één wordt geplaatst.

Als laatste wordt het rechterlid aangepast. Op de tweede positie wordt de waarde 0,5 van  $u_2^o$  geplaatst en op de vijfde positie de waarde nul van  $u_5^o$ . Het totale resultaat wordt dan als volgt:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 0,5 \\ 2,8 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

De oplossing is

$$\mathbf{u} = \{4,5 \quad 0,5 \quad 0,4 \quad 0,2 \quad 0\}^T$$

De oplegreacties volgen uit de oorspronkelijke tweede en vijfde rij.

$$-2u_1 + 6u_2^o - 4u_3 = F_2 + F_2^o$$

$$-6u_4 + 6u_5 = F_5 + F_5^o$$

Hieruit volgt

$$F_2^o = -2u_1 + 6u_2^o - 4u_3 - F_2 = -9,0 + 3,0 - 1,6 - 8,0 = \underline{-15,6 \text{ kN}}$$

$$F_5^o = -6u_4 + 6u_5 - F_5 = -1,2 + 0,0 - 0,0 = \underline{-1,2 \text{ kN}}$$

Controle:

De som van alle belasting is :  $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 16,8 \text{ kN}$

De som van de oplegreacties is:  $F_2^o + F_5^o = -16,8 \text{ kN}$

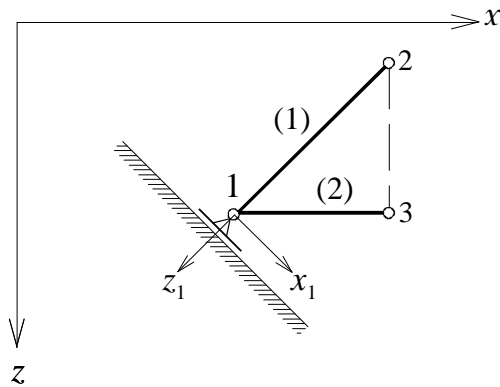
Totaal is dat nul.

## Opdracht 2

De oplegging bij  $u_5$  wordt vervangen door een veer met veerconstante  $K_5 = 12 \text{ kN/m}$ . Dan is  $u_5$  niet meer voorgeschreven. De veerconstante wordt toegevoegd aan de hoofddiagonaal term die correspondeert met  $u_5$ . Die term verandert daardoor van 6 in 18. Het stelsel wordt nu:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 18 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 0,5 \\ 2,8 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

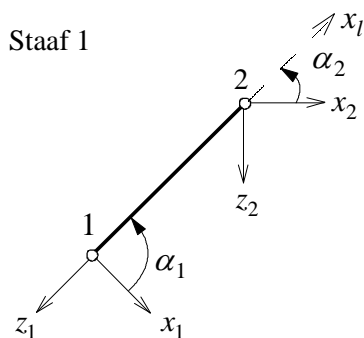
## Opdracht 3



In de rol worden lokale assen  $x_1$  en  $z_1$  gekozen en getekend.

In de knopen 2 en 3 wordt gewerkt met de globale assen  $x$  en  $z$ .

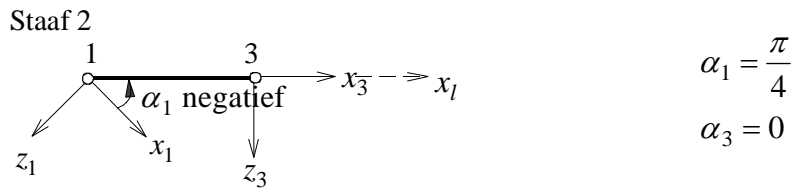
We nemen hier aan dat voor beide staven knoop 1 als eerste wordt genoemd. Dit is dus knoop  $i$ . Bij de schuine staaf loopt de lokale  $x$ -as van knoop 1 naar knoop 2. Bij de horizontale staaf loopt de lokale  $x$ -as van knoop 1 naar knoop 3.



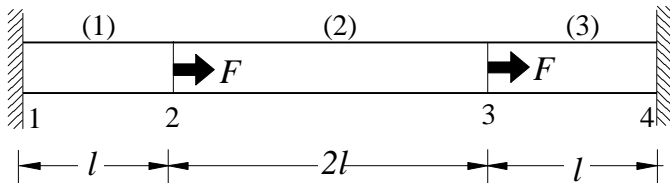
$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$$





**Opdracht 4**



$F = 100 \text{ kN}$                        $A = 0,004 \text{ m}^2$   
 $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$                $l = 3 \text{ m}$

**Vraag a:**

Invoeren van voorgeschreven verplaatsingen  $u_1^0 = u_4^0 = 0,01 \text{ m}$  vindt in het programma FRAME plaats bij 'knooplasten'. Verder is de invoer als in opdracht 5a (uit hoofdstuk 2).

In onderstaande uitvoer is de tabel snedegrootheden gecompriemd weergegeven.

Frame Studieverisie 03/04/1996 12:58:55 Opdracht 4

```

Krachteenheid      : kN           Lengte-eenheid     : m
Aantal staven      : 3             Aantal veren       : 0
Aantal knopen      : 4             Aantal BG          : 1
Aantal randvwn.    : 2             Aantal BC          : 0
Scheefstand        : 0             Analyse type       : FL+GL
Eigen gewicht van de constructie : 3.77
    
```

```

Assen stelsel definitie :
0-----> X+
|
|          Positieve rotatie RY van Z+ naar X+
v Z+
    
```

Knoop coördinaten					
Knopnr	X	Z	Knopnr	X	Z
1	0.000	0.000	2	3.000	0.000
3	9.000	0.000	4	12.000	0.000

Geometrische Profielgegevens  
H=Hoogte, D=Diameter, Tb=dikte flens boven, To=dikte flens onder  
Bb=Breedte boven, Bo=Breedte onder, Tl=dikte lijf

Prof	Type	H/D	Tb	To	Bb	Bo	Tl
A1	A-prof	0.0000					

Profiel Eigenschappen								
Code	A	I	Neta	E	S.G.	R	Prof pos	Mat
A1	4.000E-003	1.000E-004	0.000E+000	2.100E+008	78.5	Y	A1	Staal

Staaftopologie

Stf	Code	I	J	NVM	Lengte	dx/dz	excIx	excIz	excJx	excJz
1	A1	1	2	111 111	3.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
2	A1	2	3	111 111	6.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
3	A1	3	4	111 111	3.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00

## Randcondities

Kn timer	Cond	CX	CZ	CM
1	111			
4	111			

## Knooplasten

(Type : 1=Krachten , 2=Knoopverplaatsingen)

BG : 1 puntlast F

Kn timer	Type	Richting	Waarde
1	2	GX	0.01
2	1	GX	100.00
3	1	GX	100.00
4	2	GX	0.01

## Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
1	1	0.000	0.010000	0.000000	0.000000	100.000	0.000	0.000
2	1	0.000	0.010357	0.000000	0.000000	0.000	0.000	0.000
3	1	0.000	0.010357	0.000000	0.000000	-100.000	0.000	0.000

## Knoopverplaatsingen per knoop voor BG

Kn timer	BG	UX	UZ	RY
1	1	0.010000	0.000000	0.000000
2	1	0.010357	0.000000	0.000000
3	1	0.010357	0.000000	0.000000
4	1	0.010000	0.000000	0.000000

## Reactiekrachten voor BG per knoop

Kn timer	BG	FX	FZ	MY
1	1	-100.000	0.000	0.000
4	1	-100.000	0.000	0.000

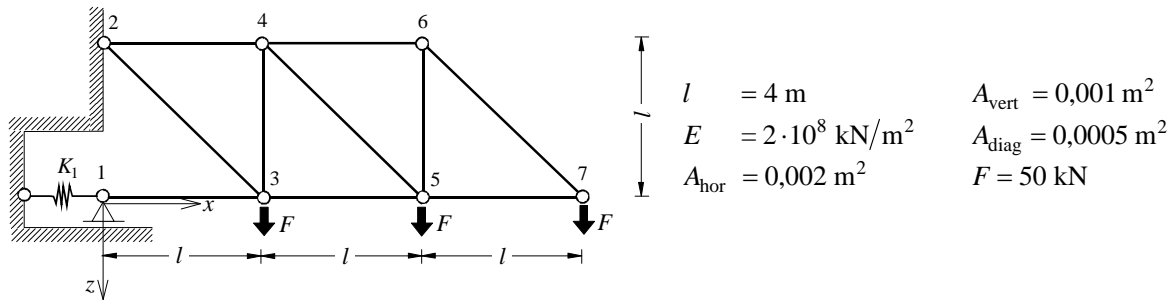
## Totale evenwicht van de constructie per belastingsgeval

BG	Actie FX	React FX	Actie FZ	React FZ	Actie MY	React MY
1	200.000	-200.000	0.000	0.000	0.000	0.000

**Vraag b:**

De berekening levert dezelfde krachten als in opdracht 5 uit hoofdstuk 2, alleen zijn alle knoopverplaatsingen 0,01 m groter. De gehele constructie is getransleerd over een afstand 0,01 m. De krachtsverdeling verandert daardoor niet.

**Opdracht 5**



**Vraag a:**

Invoeren van de veerconstante  $K_1 = 10^5 \text{ kN/m}$  in knoop 1 geschiedt in het programma FRAME in de ‘randcondities’.

In onderstaande uitvoer is de tabel snedegrootheden gecomprimeerd weergegeven.

Frame Studieverisie 03/04/1996 13:17:44 Opdracht 5a

```

Krachteenheid      : kN      Lengte-eenheid      : m
Aantal staven      : 10      Aantal veren        : 0
Aantal knopen      : 7       Aantal BG           : 1
Aantal randvwn.    : 7       Aantal BC           : 0
Scheefstand        : 0       Analyse type        : FL+GL
Eigen gewicht van de constructie : 4.43
    
```

```

Assen stelsel definitie :
0-----> X+
|
|          Positieve rotatie RY van Z+ naar X+
v Z+
    
```

Knoop coördinaten

Knpnr	X	Z	Knpnr	X	Z
1	0.000	0.000	2	0.000	-4.000
3	4.000	0.000	4	4.000	-4.000
5	8.000	0.000	6	8.000	-4.000
7	12.000	0.000			

Profiel Eigenschappen

Code	A	I	Neta	E	S.G.	R	Prof pos	Mat
AH	2.000E-003	1.000E-004	0.000E+000	2.000E+008	78.5	Y	AH	Staal
AD	5.000E-004	1.000E-004	0.000E+000	2.000E+008	78.5	Y	AD	Staal
AV	1.000E-003	1.000E-004	0.000E+000	2.000E+008	78.5	Y	AV	Staal

Staaftopologie

Stf	Code	I	J	NVM	Lengte	dx/dz	excIx	excIz	excJx	excJz
1	AH	1	3	110 110	4.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
2	AH	3	5	110 110	4.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
3	AH	5	7	110 110	4.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
4	AH	2	4	110 110	4.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
5	AH	4	6	110 110	4.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
6	AD	2	3	110 110	5.66	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7	AD	4	5	110 110	5.66	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
8	AD	6	7	110 110	5.66	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9	AV	3	4	110 110	4.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	AV	5	6	110 110	4.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

## Randcondities

Kn timer	Cond	CX	CZ	CM
1	011	100000		
2	111			
3	001			
4	001			
5	001			
6	001			
7	001			

## Knooplasten

(Type : 1=Krachten , 2=Knoopverplaatsingen)

BG : 1 puntlast F

Kn timer	Type	Richting	Waarde
3	1	GZ	50.00
5	1	GZ	50.00
7	1	GZ	50.00

## Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
1	1	0.000	-0.003000	0.000000	0.005743	-299.999	0.000	0.000
2	1	0.000	-0.006000	0.022971	0.005578	-150.000	0.000	0.000
3	1	0.000	-0.007500	0.045284	0.004164	-50.000	0.000	0.000
4	1	0.000	0.000000	0.000000	0.006243	150.000	0.000	0.000
5	1	0.000	0.001500	0.024971	0.005328	50.000	0.000	0.000
6	1	0.000	0.000000	0.000000	0.003621	212.132	0.000	0.000
7	1	0.000	0.018718	0.016596	0.003664	141.421	0.000	0.000
8	1	0.000	0.034142	0.031314	0.003207	70.711	0.000	0.000
9	1	0.000	-0.022971	-0.006000	0.001875	-100.000	0.000	0.000
10	1	0.000	-0.045284	-0.007500	0.002375	-50.000	0.000	0.000

## Knoopverplaatsingen per knoop voor BG

Kn timer	BG	UX	UZ	RY
1	1	-0.003000	0.000000	0.000000
2	1	0.000000	0.000000	0.000000
3	1	-0.006000	0.022971	0.000000
4	1	0.001500	0.024971	0.000000
5	1	-0.007500	0.045284	0.000000
6	1	0.002000	0.046284	0.000000
7	1	-0.008000	0.061941	0.000000

## Reactiekrachten voor BG per knoop

Kn timer	BG	FX	FZ	MY
1	1	300.000	0.000	0.000
2	1	-300.000	-150.000	0.000
3	1	0.000	0.000	0.000
4	1	0.000	0.000	0.000
5	1	0.000	0.000	0.000
6	1	0.000	0.000	0.000
7	1	0.000	0.000	0.000

## Totale evenwicht van de constructie per belastingsgeval

BG	Actie FX	React FX	Actie FZ	React FZ	Actie MY	React MY
1	0.000	0.000	150.000	-150.000	-1200.000	1200.000

**Vraag b:**

De normaalkrachten en oplegreacties zijn ongewijzigd, alleen de verplaatsingen zijn groter. Dat is zo, omdat de constructie statisch bepaald is.

**Vraag c:**

Invoeren van de veerconstante  $K_1 = 10^{10}$  kN/m in knoop 1 levert weer de uitkomsten van opdracht 5a uit hoofdstuk 2. Onderstaande uitvoer bevestigt dat. In onderstaande uitvoer is de tabel snedegrootheden gecompriemd weergegeven.

Frame Studieverisie 03/04/1996 13:13:23 Opdracht 5c

Krachtenheid : kN                    Lengte-eenheid : m  
 Aantal staven : 10                    Aantal veren : 0  
 Aantal knopen : 7                    Aantal BG : 1  
 Aantal randvwn. : 7                    Aantal BC : 0  
 Scheefstand : 0                    Analyse type : FL+GL  
 Eigen gewicht van de constructie : 4.43

Assen stelsel definitie :

0-----> X+  
 |  
 |                    Positieve rotatie RY van Z+ naar X+  
 v Z+

Knoop coördinaten

Knppnr	X	Z	Knppnr	X	Z
1	0.000	0.000	2	0.000	-4.000
3	4.000	0.000	4	4.000	-4.000
5	8.000	0.000	6	8.000	-4.000
7	12.000	0.000			

Profiel Eigenschappen

Code	A	I	Neta	E	S.G.	R	Prof pos	Mat
AH	2.000E-003	1.000E-004	0.000E+000	2.000E+008	78.5	Y	AH	Staal
AD	5.000E-004	1.000E-004	0.000E+000	2.000E+008	78.5	Y	AD	Staal
AV	1.000E-003	1.000E-004	0.000E+000	2.000E+008	78.5	Y	AV	Staal

Staaftopologie

Stf	Code	I	J	NVM	Lengte	dx/dz	excIx	excIz	excJx	excJz
1	AH	1	3	110 110	4.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
2	AH	3	5	110 110	4.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
3	AH	5	7	110 110	4.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
4	AH	2	4	110 110	4.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
5	AH	4	6	110 110	4.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
6	AD	2	3	110 110	5.66	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7	AD	4	5	110 110	5.66	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
8	AD	6	7	110 110	5.66	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9	AV	3	4	110 110	4.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	AV	5	6	110 110	4.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Randcondities

Knppnr	Cond	CX	CZ	CM
1	011	10000000000		
2	111			
3	001			
4	001			
5	001			
6	001			
7	001			

Knooplasten (Type : 1=Krachten , 2=Knoopverplaatsingen) BG : 1 puntlast F

Knppnr	Type	Richting	Waarde
3	1	GZ	50.00
5	1	GZ	50.00
7	1	GZ	50.00

Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
-----	----	---------	----	----	----	---	---	---

1	1	0.000	0.000000	0.000000	0.004993	-299.999	0.000	0.000
2	1	0.000	-0.003000	0.019971	0.004828	-150.000	0.000	0.000
3	1	0.000	-0.004500	0.039284	0.003414	-50.000	0.000	0.000
4	1	0.000	0.000000	0.000000	0.005493	150.000	0.000	0.000
5	1	0.000	0.001500	0.021971	0.004578	50.000	0.000	0.000
6	1	0.000	0.000000	0.000000	0.002871	212.132	0.000	0.000
7	1	0.000	0.016596	0.014475	0.002914	141.421	0.000	0.000
8	1	0.000	0.029900	0.027071	0.002457	70.711	0.000	0.000
9	1	0.000	-0.019971	-0.003000	0.001125	-100.000	0.000	0.000
10	1	0.000	-0.039284	-0.004500	0.001625	-50.000	0.000	0.000

Knoopverplaatsingen per knoop voor BG

Knopnr	BG	UX	UZ	RY
1	1	0.000000	0.000000	0.000000
2	1	0.000000	0.000000	0.000000
3	1	-0.003000	0.019971	0.000000
4	1	0.001500	0.021971	0.000000
5	1	-0.004500	0.039284	0.000000
6	1	0.002000	0.040284	0.000000
7	1	-0.005000	0.052941	0.000000

Reactiekrachten voor BG per knoop

Knopnr	BG	FX	FZ	MY
1	1	300.000	0.000	0.000
2	1	-300.000	-150.000	0.000
3	1	0.000	0.000	0.000
4	1	0.000	0.000	0.000
5	1	0.000	0.000	0.000
6	1	0.000	0.000	0.000
7	1	0.000	0.000	0.000

Totale evenwicht van de constructie per belastingsgeval

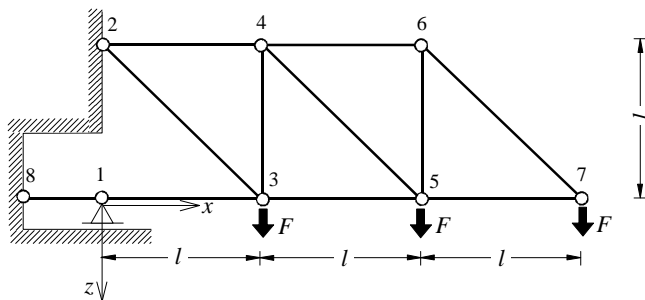
BG	Actie FX	React FX	Actie FZ	React FZ	Actie MY	React MY
1	0.000	0.000	150.000	-150.000	-1200.000	1200.000

Conclusie: De bewering klopt, dat een zeer stijve veer overeenkomt met een voorgeschreven verplaatsing nul.

**Vraag d**

Veerconstante  $K = \frac{EA}{a} = \frac{2 \cdot 10^8 \times A}{1} = 10000 \text{ kN/m}$ , Hieruit volgt dat  $A = 0,0005 \text{ m}^2$ .

We voegen nu een horizontale staaf toe tussen de knoop 1 en een nieuwe knoop 8. Knoop 8 heeft de  $x$ -coördinaat  $-1$  en de  $z$ -coördinaat  $0$ .



Frame Studieversie 28/05/1996 14:14:59 Opdracht 5d

Krachtenheid : kN      Lengte-eenheid : m  
 Aantal staven : 11      Aantal veren : 0

Aantal knopen : 8                   Aantal BG : 1  
 Aantal randvwn. : 8                Aantal BC : 0  
 Scheefstand : 0                   Analyse type : FL+GL  
 Eigen gewicht van de constructie : 4.47

Assen stelsel definitie :

0-----> X+  
 |  
 |            Positieve rotatie RY van Z+ naar X+  
 v Z+

Knoop coördinaten

Knopnr	X	Z	Knopnr	X	Z
1	0.000	0.000	2	0.000	-4.000
3	4.000	0.000	4	4.000	-4.000
5	8.000	0.000	6	8.000	-4.000
7	12.000	0.000	8	-1.000	0.000

Profiel Eigenschappen

Code	A	I	Neta	E	S.G.	R	Prof pos	Mat
AH	2.000E-003	1.000E-004	0.000E+000	2.000E+008	78.5	Y	AH	Staal
AD	5.000E-004	1.000E-004	0.000E+000	2.000E+008	78.5	Y	AD	Staal
AV	1.000E-003	1.000E-004	0.000E+000	2.000E+008	78.5	Y	AV	Staal
AN	5.000E-004	1.000E-004	0.000E+000	2.000E+008	78.5	Y	AN	Staal

Staaftopologie

Stf	Code	I	J	NVM	Lengte	dx/dz	excIx	excIz	excJx	excJz
1	AH	1	3	110 110	4.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
2	AH	3	5	110 110	4.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
3	AH	5	7	110 110	4.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
4	AH	2	4	110 110	4.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
5	AH	4	6	110 110	4.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
6	AD	2	3	110 110	5.66	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7	AD	4	5	110 110	5.66	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
8	AD	6	7	110 110	5.66	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9	AV	3	4	110 110	4.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	AV	5	6	110 110	4.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
11	AN	1	8	110 110	1.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00

Randcondities

Knop	Cond	CX	CZ	CM
1	001			
2	111			
3	001			
4	001			
5	001			
6	001			
7	001			
8	111			

Knooplasten

(Type : 1=Krachten , 2=Knoopverplaatsingen)

BG : 1 puntlast F

Knopnr	Type	Richting	Waarde
3	1	GZ	50.00
5	1	GZ	50.00
7	1	GZ	50.00

Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
1	1	0.000	-0.003000	0.000000	0.005743	-299.999	0.000	0.000
2	1	0.000	-0.006000	0.022971	0.005578	-150.000	0.000	0.000
3	1	0.000	-0.007500	0.045284	0.004164	-50.000	0.000	0.000

4	1	0.000	0.000000	0.000000	0.006243	150.000	0.000	0.000
5	1	0.000	0.001500	0.024971	0.005328	50.000	0.000	0.000
6	1	0.000	0.000000	0.000000	0.003621	212.132	0.000	0.000
7	1	0.000	0.018718	0.016596	0.003664	141.421	0.000	0.000
8	1	0.000	0.034142	0.031314	0.003207	70.711	0.000	0.000
9	1	0.000	-0.022971	-0.006000	0.001875	-100.000	0.000	0.000
10	1	0.000	-0.045284	-0.007500	0.002375	-50.000	0.000	0.000
11	1	0.000	0.003000	0.000000	0.000000	-299.999	0.000	0.000

## Knoopverplaatsingen per knoop voor BG

Knppnr	BG	UX	UZ	RY
1	1	-0.003000	0.000000	0.000000
2	1	0.000000	0.000000	0.000000
3	1	-0.006000	0.022971	0.000000
4	1	0.001500	0.024971	0.000000
5	1	-0.007500	0.045284	0.000000
6	1	0.002000	0.046284	0.000000
7	1	-0.008000	0.061941	0.000000
8	1	0.000000	0.000000	0.000000

## Reactiekrachten voor BG per knoop

Knppnr	BG	FX	FZ	MY
1	1	0.000	0.000	0.000
2	1	-300.000	-150.000	0.000
3	1	0.000	0.000	0.000
4	1	0.000	0.000	0.000
5	1	0.000	0.000	0.000
6	1	0.000	0.000	0.000
7	1	0.000	0.000	0.000
8	1	300.000	0.000	0.000

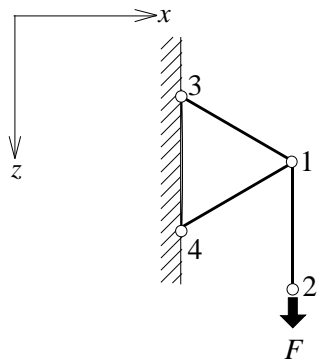
## Totale evenwicht van de constructie per belastingsgeval

BG	Actie FX	React FX	Actie FZ	React FZ	Actie MY	React MY
1	0.000	0.000	150.000	-150.000	-1200.000	1200.000

Normaalkrachten [kN] uit opdracht 5d

### Opdracht 6





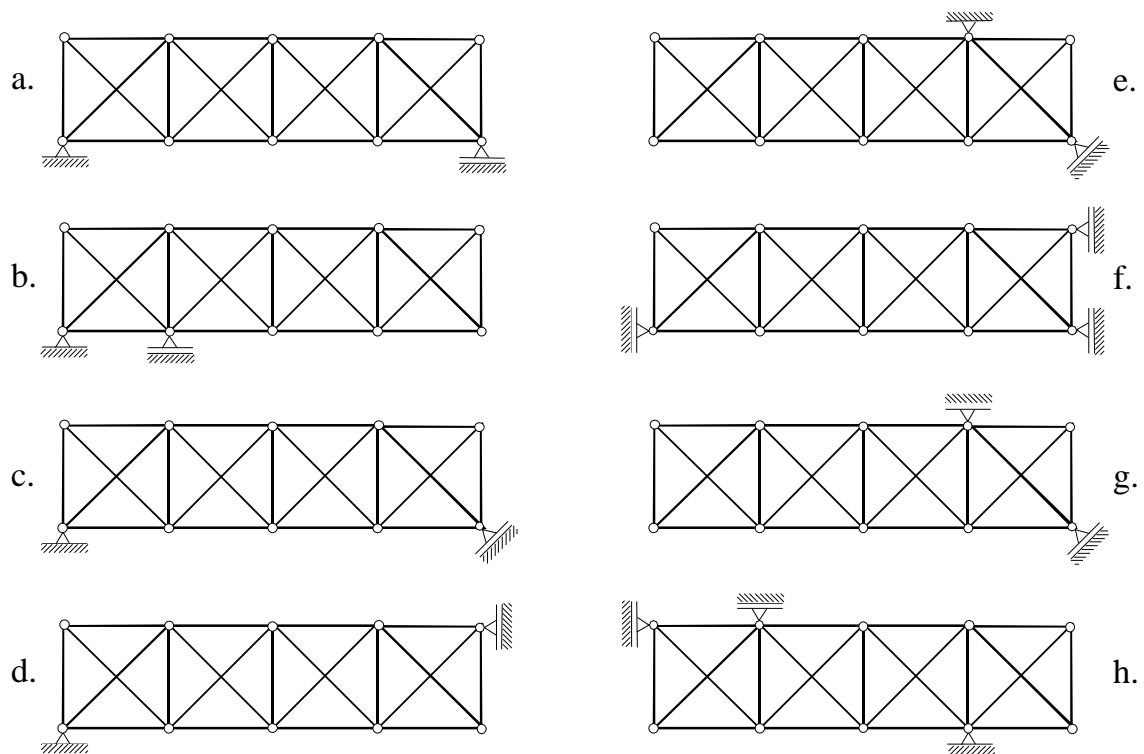
**Vraag a**

De verplaatsing  $u_{x,2}$  kan onverhinderd optreden. Daardoor moet bij de Gauss-eliminatie door nul worden gedeeld. De berekening wordt afgebroken.

**Vraag b**

De remedie is om de verplaatsing  $u_{x,2}$  van knoop 2 voor te schrijven. (Overigens moeten ook alle vier knooprotoaties worden voorgeschreven.)

**Opdracht 7**



oplegging a: goed

oplegging b: goed

oplegging c: goed

*oplegging d:* mag theoretisch wel, maar niet aanbevolen

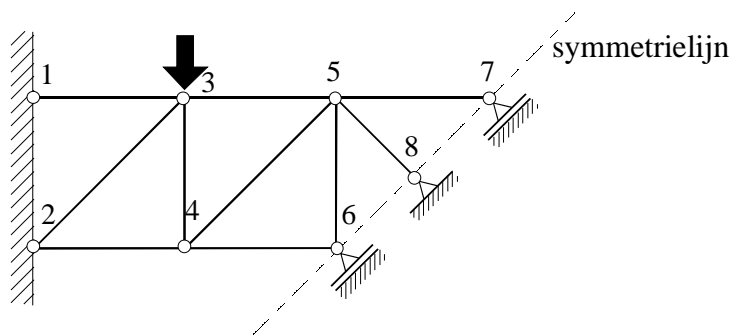
*oplegging e:* fout; bij rotatie om de scharnieroplegging kan de rol niet de benodigde tegenkracht leveren.

*oplegging f:* fout; een verticale translatie kan niet worden verhinderd.

*oplegging g:* fout; bij rotatie om de scharnieroplegging kan de rol niet de benodigde tegenkracht leveren.

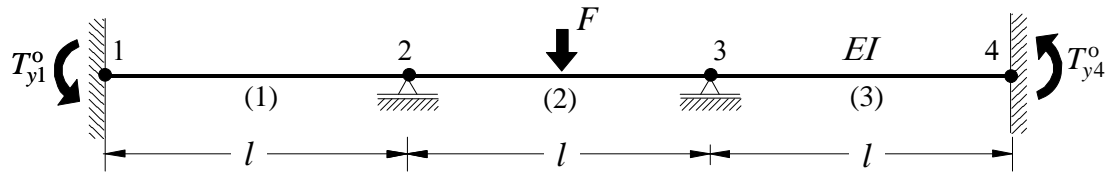
*oplegging h:* goed

### Opdracht 8



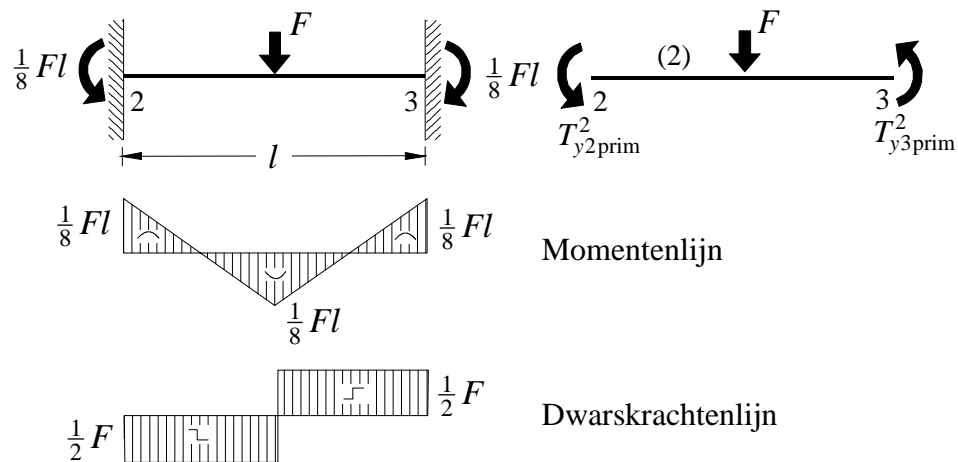
De twee echte knopen 6 en 7 op de symmetrieliijn krijgen een rol evenwijdig aan de symmetrieliijn. De kruisende diagonaalstaaf krijgt in de symmetrieliijn een knoop erbij (nummer 8). Deze knoop moet worden ingevoerd als een scharnieroplegging (zowel  $u_x$  als  $u_z$  nul). Uiteraard zijn ook de knopen 1 en 2 scharnieropleggingen. Verder moet de rotatie van alle acht knopen worden voorgeschreven.

**Opdracht 1**



**Eerste stap (primaire toestand)**

Voor het middenveld geldt



De belastingsvector  $f_{\text{tot}}$  berekenen we in onderstaande tabel. De oplegreacties (koppels)  $T_{y1}^o$  en  $T_{y4}^o$  in de knopen 1 en 4 worden in de vector  $f$  van de knoopbelastingen opgenomen.

		$f_{\text{prim}}$	$f$	$f_{\text{tot}} = f - f_{\text{prim}}$	
element 1	$T_{y1\text{prim}}^1 = 0$	$T_{y1\text{prim}} = 0$	$T_{y1} = T_{y1}^o$	0	knoop 1
	$T_{y2\text{prim}}^1 = 0$				
element 2	$T_{y2\text{prim}}^2 = \frac{1}{8}Fl$	$T_{y2\text{prim}} = \frac{1}{8}Fl$	$T_{y2} = 0$	$-\frac{1}{8}Fl$	knoop 2
	$T_{y3\text{prim}}^2 = -\frac{1}{8}Fl$				
element 3	$T_{y3\text{prim}}^3 = 0$	$T_{y3\text{prim}} = -\frac{1}{8}Fl$	$T_{y3} = 0$	$\frac{1}{8}Fl$	knoop 3
	$T_{y4\text{prim}}^3 = 0$				
		$T_{y4\text{prim}} = 0$	$T_{y4} = T_{y4}^o$	0	knoop 4

De vector  $f_{\text{tot}}$  is dus:

$$f_{\text{tot}} = \left\{ T_{y1}^o, -\frac{1}{8}Fl, \frac{1}{8}Fl, T_{y4}^o \right\}^T$$

**Tweede stap**

Het globale stelsel vergelijkingen is hetzelfde als in vergelijking (4.4), alleen met het rechterlid  $f_{\text{tot}}$  dat hierboven in de eerste stap is bepaald:

$$\frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{y1} \\ \varphi_{y2} \\ \varphi_{y3} \\ \varphi_{y4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1^o \\ -\frac{1}{8}Fl \\ \frac{1}{8}Fl \\ T_4^o \end{Bmatrix}$$

Van de vrijheidsgraden zijn  $\varphi_{y1}$  en  $\varphi_{y4}$  voorgeschreven (waarde nul). Het stelsel reduceert dan tot:

$$\frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{y2} \\ \varphi_{y3} \end{Bmatrix} = \frac{Fl}{8} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

De oplossing is:

$$\varphi_{y2} = -\frac{1}{48} \frac{Fl^2}{EI}$$

$$\varphi_{y3} = \frac{1}{48} \frac{Fl^2}{EI}$$

De momenten en dwarskrachten worden:

Element 1:

$$e_1 = -\varphi_{y1} = 0$$

$$e_2 = \varphi_{y2} = -\frac{1}{48} \frac{Fl^2}{EI}$$

$$M_1 = \frac{4EI}{l} e_1 - \frac{2EI}{l} e_2 = \left(4 \cdot 0 - 2 \cdot -\frac{1}{48}\right) Fl = \frac{1}{24} Fl$$

$$M_2 = -\frac{2EI}{l} e_1 + \frac{4EI}{l} e_2 = \left(-2 \cdot 0 + 4 \cdot -\frac{1}{48}\right) Fl = -\frac{1}{12} Fl$$

$$V = \frac{M_2 - M_1}{l} = -\frac{1}{8} F$$

Element 2:

$$e_1 = -\varphi_{y2} = \frac{1}{48} \frac{Fl^2}{EI}$$

$$e_2 = \varphi_{y3} = \frac{1}{48} \frac{Fl^2}{EI}$$

$$M_1 = \frac{4EI}{l} e_1 - \frac{2EI}{l} e_2 = \left(4 \cdot \frac{1}{48} - 2 \cdot \frac{1}{48}\right) Fl = \frac{1}{24} Fl$$

$$M_2 = -\frac{2EI}{l} e_1 + \frac{4EI}{l} e_2 = \left(-2 \cdot \frac{1}{48} + 4 \cdot \frac{1}{48}\right) Fl = \frac{1}{24} Fl$$

$$V = \frac{M_2 - M_1}{l} = 0$$

Element 3:

$$e_1 = -\varphi_{y3} = -\frac{1}{48} \frac{Fl^2}{EI}$$

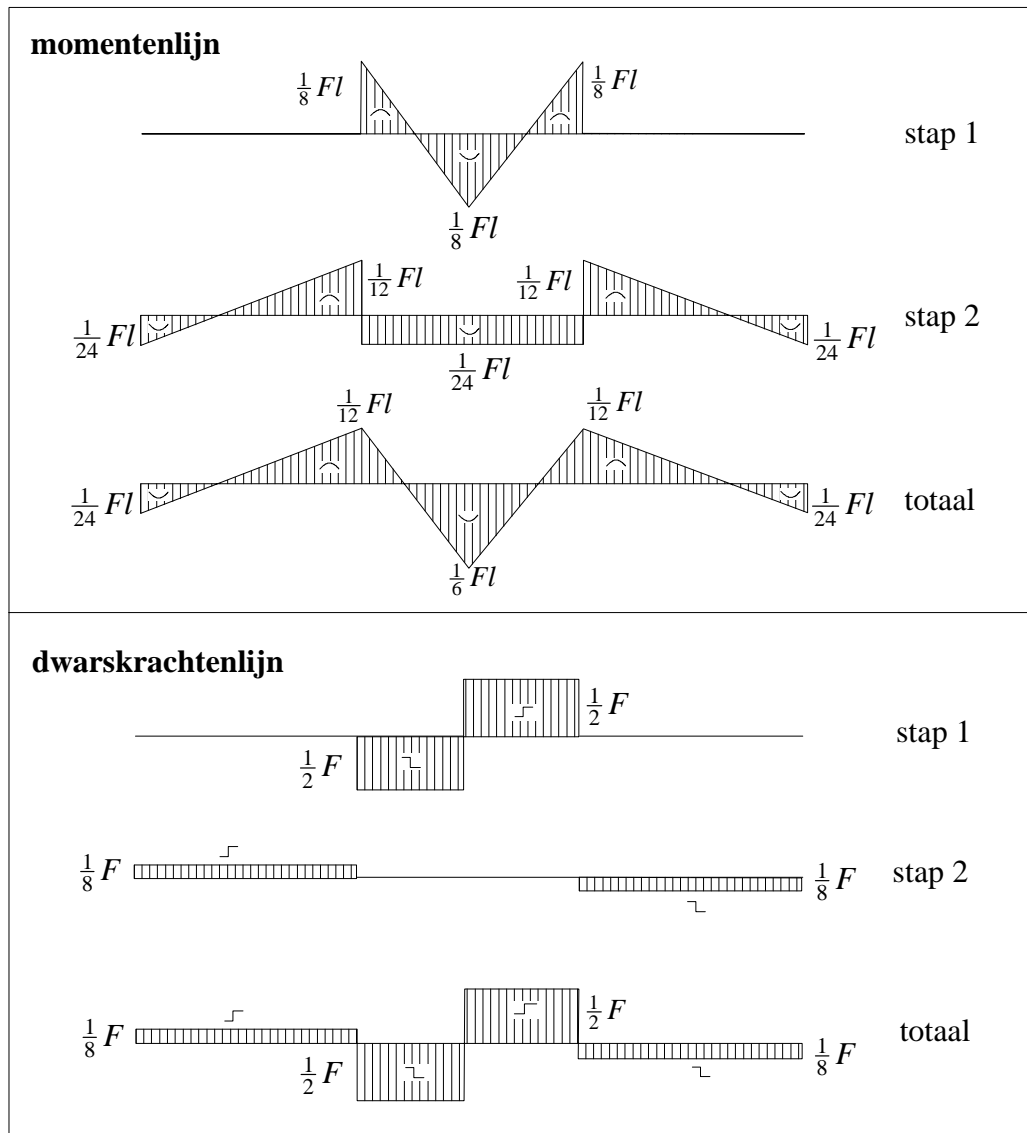
$$e_2 = \varphi_{y4} = 0$$

$$M_1 = \frac{4EI}{l} e_1 - \frac{2EI}{l} e_2 = \left(4 \cdot \frac{-1}{48} - 2 \cdot 0\right) Fl = -\frac{1}{12} Fl$$

$$M_2 = -\frac{2EI}{l} e_1 + \frac{4EI}{l} e_2 = \left(-2 \cdot \frac{-1}{48} + 4 \cdot 0\right) Fl = \frac{1}{24} Fl$$

$$V = \frac{M_2 - M_1}{l} = \frac{1}{8} F$$

De uit stap 2 volgende momenten- en dwarskrachtenlijn is hieronder getekend, samen met die voor stap 1. Sommatie van de twee stappen geeft het totaalresultaat.

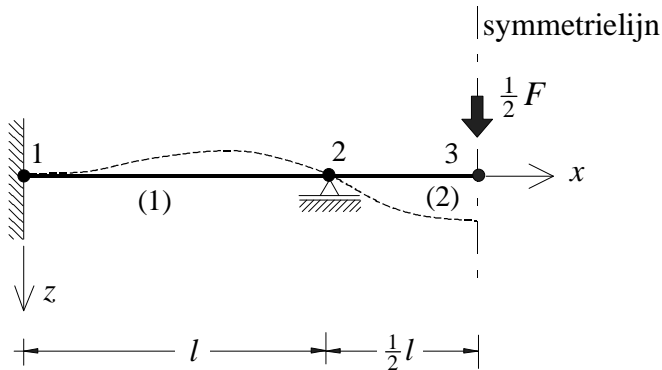


De oplegreacties worden berekend uit de niet gebruikte eerste en vierde vergelijking van het globale stelsel:

$$\frac{EI}{l}(4\varphi_{y1} + 2\varphi_{y2}) = T_1^o \rightarrow T_1^o = -\frac{1}{24}Fl$$

$$\frac{EI}{l}(2\varphi_{y3} + 4\varphi_{y4}) = T_4^o \rightarrow T_4^o = \frac{1}{24}Fl$$

### Opdracht 2



Er zijn nu twee elementen en drie knopen. De puntlast wordt voor de helft in rekening gebracht. Geen van de twee elementen wordt rechtstreeks belast. De enige belasting treedt op in knoop 3 (puntlast  $\frac{1}{2}F$ ). Deze knoop ondergaat nu een verticale verplaatsing, maar zijn rotatie is nul vanwege de symmetrie. We moeten nu werken met twee vrijheidsgraden per knoop ( $u_z$  en  $\varphi_y$ ). Van de totaal zes vrijheidsgraden zijn alleen  $\varphi_{y2}$  en  $u_{z3}$  vrij. De andere vier zijn nul ( $u_{z1}$ ,  $\varphi_{y1}$ ,  $u_{z2}$  en  $\varphi_{y3}$ ). Bij  $\varphi_{y2}$  wordt geen belasting opgegeven (beter gezegd  $T_{y3} = 0$ ) en bij  $u_{z3}$  is de belasting gelijk aan  $\frac{1}{2}F$ . Bij de vier nulverplaatsingen moeten we de oplegreacties berekenen (respectievelijk  $F_{z1}^o$ ,  $T_{y1}^o$ ,  $F_{z2}^o$  en  $T_{y3}^o$ ).

We passen de elementstijfheidsmatrix (4.34) uit het boek twee keer toe, voor element 1 met lengte  $l$  en voor element 2 met lengte  $\frac{1}{2}l$ .

Element 1:

$$\mathbf{K}^e = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc} \hline & & \text{1} & \text{2} \\ \hline 12 \frac{EI}{l^3} & -6 \frac{EI}{l^2} & -12 \frac{EI}{l^3} & -6 \frac{EI}{l^2} \\ -6 \frac{EI}{l^2} & 4 \frac{EI}{l} & 6 \frac{EI}{l^2} & 2 \frac{EI}{l} \\ \hline -12 \frac{EI}{l^3} & 6 \frac{EI}{l^2} & 12 \frac{EI}{l^3} & 6 \frac{EI}{l^2} \\ -6 \frac{EI}{l^2} & 2 \frac{EI}{l} & 6 \frac{EI}{l^2} & 4 \frac{EI}{l} \\ \hline \end{array} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array}$$

De elementstijfheidsmatrix voor element 2 volgt hieruit door  $l$  te vervangen door  $\frac{1}{2}l$ ,  $l^2$  door  $\frac{1}{4}l^2$  en  $l^3$  door  $\frac{1}{8}l^3$ .

Element 2:

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 96 \frac{EI}{l^3} & -24 \frac{EI}{l^2} \\ -24 \frac{EI}{l^2} & 8 \frac{EI}{l} \end{matrix} & \begin{matrix} -96 \frac{EI}{l^3} & -24 \frac{EI}{l^2} \\ 24 \frac{EI}{l^2} & 4 \frac{EI}{l} \end{matrix} \\ \begin{matrix} -96 \frac{EI}{l^3} & 24 \frac{EI}{l^2} \\ -24 \frac{EI}{l^2} & 4 \frac{EI}{l} \end{matrix} & \begin{matrix} 96 \frac{EI}{l^3} & 24 \frac{EI}{l^2} \\ 24 \frac{EI}{l^2} & 8 \frac{EI}{l} \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Assemblage van de globale stijfheidsmatrix uit deze twee elementenmatrices levert:

$$\begin{bmatrix} 12 \frac{EI}{l^3} & -6 \frac{EI}{l^2} & -12 \frac{EI}{l^3} & -6 \frac{EI}{l^2} \\ -6 \frac{EI}{l^2} & 4 \frac{EI}{l^2} & 6 \frac{EI}{l^2} & 2 \frac{EI}{l} \\ -12 \frac{EI}{l^3} & 6 \frac{EI}{l^2} & 108 \frac{EI}{l^3} & -18 \frac{EI}{l^2} & -96 \frac{EI}{l^3} & -24 \frac{EI}{l^2} \\ -6 \frac{EI}{l^2} & 2 \frac{EI}{l} & -18 \frac{EI}{l^2} & 12 \frac{EI}{l} & 24 \frac{EI}{l^2} & 4 \frac{EI}{l} \\ -96 \frac{EI}{l^3} & 24 \frac{EI}{l^2} & 96 \frac{EI}{l^3} & 24 \frac{EI}{l^2} \\ -24 \frac{EI}{l^2} & 4 \frac{EI}{l} & 24 \frac{EI}{l^2} & 8 \frac{EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{z1} \\ \varphi_{y1} \\ u_{z2} \\ \varphi_{y2} \\ u_{z3} \\ \varphi_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{z1}^o \\ T_{y1}^o \\ F_{z2}^o \\ 0 \\ \frac{1}{2} F \\ T_{y3}^o \end{Bmatrix}$$

Alleen  $\varphi_{y2}$  en  $u_{z3}$  zijn vrije verplaatsingen, dus er zijn maar twee vergelijkingen:

$$\begin{bmatrix} 12 \frac{EI}{l} & 24 \frac{EI}{l^2} \\ 24 \frac{EI}{l^2} & 96 \frac{EI}{l^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{y2} \\ u_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} F \end{Bmatrix}$$

De oplossing is:

$$\varphi_{y2} = -\frac{1}{48} \frac{Fl^2}{EI}$$

$$u_{z3} = \frac{1}{96} \frac{Fl^3}{EI}$$

De waarde van  $\varphi_{y2}$  stemt overeen met de uitkomst van opdracht 1. De waarde voor  $u_{z3}$  is nu nieuwe informatie.

Snedegrootheden in element 1

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & -1 & -\frac{1}{l} & 0 \\ -\frac{1}{l} & 0 & \frac{1}{l} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{z1} \\ \varphi_{y1} \\ u_{z2} \\ \varphi_{y2} \end{Bmatrix}$$

$$e_1 = 0$$

$$e_2 = \varphi_{y2} = -\frac{1}{48} \frac{Fl^2}{EI}$$

$$M_1 = 4 \frac{EI}{l} e_1 - 2 \frac{EI}{l} e_2 = \frac{1}{24} Fl$$

$$M_2 = -2 \frac{EI}{l} e_1 + 4 \frac{EI}{l} e_2 = -\frac{1}{12} Fl$$

$$V = \frac{M_2 - M_1}{l} = -\frac{1}{8} F$$

Dit is dezelfde uitkomst als in opdracht 1.

Snedegrootheden in element 2

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{1}{2}l} & -1 & -\frac{1}{\frac{1}{2}l} & 0 \\ -\frac{1}{\frac{1}{2}l} & 0 & \frac{1}{\frac{1}{2}l} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{z2} \\ \varphi_{y2} \\ u_{z3} \\ \varphi_{y3} \end{Bmatrix}$$

$$e_1 = -\varphi_{y2} - \frac{2}{l} u_{z3} = \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{48}\right) \frac{Fl^2}{EI} = 0$$

$$e_2 = \frac{2}{l} u_{z3} = \frac{1}{48} \frac{Fl^2}{EI}$$

$$M_1 = 4 \frac{EI}{\frac{1}{2}l} e_1 - 2 \frac{EI}{\frac{1}{2}l} e_2 = -\frac{1}{12} Fl$$

$$M_2 = -2 \frac{EI}{\frac{1}{2}l} e_1 + 4 \frac{EI}{\frac{1}{2}l} e_2 = \frac{1}{6} Fl$$

$$V = \frac{M_2 - M_1}{\frac{1}{2}l} = \frac{1}{2} F$$

Dit is dezelfde uitkomst als in opdracht 1.

Oplegreacties



Hiervoor gaan we terug naar de globale stijfheidsmatrix:

$$F_{z1}^o = -6 \frac{EI}{l^2} \varphi_{y2} = \left(-6 \cdot -\frac{1}{48}\right) F = \frac{1}{8} F$$

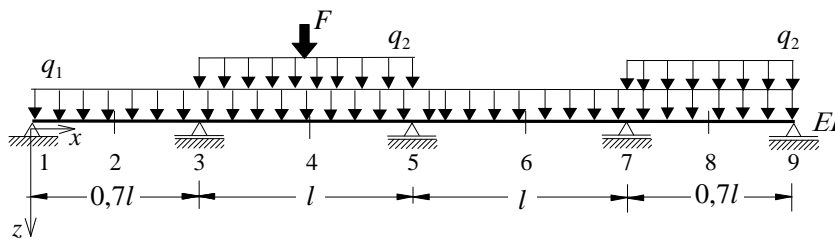
$$T_{y1}^o = 2 \frac{EI}{l} \varphi_{y2} = \left(2 \cdot -\frac{1}{48}\right) Fl = -\frac{1}{24} Fl$$

$$F_{z2}^o = -18 \frac{EI}{l^2} \varphi_{y2} - 96 \frac{EI}{l^3} u_{z3} = \left(-18 \cdot -\frac{1}{48} - 96 \cdot \frac{1}{96}\right) F = -\frac{5}{8} F$$

$$T_{y3}^o = 4 \frac{EI}{l} \varphi_{y2} + 24 \frac{EI}{l^2} u_{z3} = \left(4 \cdot -\frac{1}{48} + 24 \cdot \frac{1}{96}\right) Fl = \frac{1}{6} Fl$$

De waarde van  $T_{y1}^o$  komt overeen met de uitkomst van opdracht 1. De waarden van  $F_{z1}^o$  en  $F_{z2}^o$  zijn nieuwe extra informatie. De waarde  $T_{y3}^o$  is geen echte oplegreactie. Dit koppel verschijnt nu in de berekening omdat de symmetrie wordt benut.

### Opdracht 3



Invoeren van de gegevens in FRAME:

$$\begin{array}{lll}
 l = 30 \text{ m} & F = 2400 \text{ kN} & A = 10 \text{ m}^2 \\
 q_1 = 100 \text{ kN/m} & E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2 & I = 0,8 \text{ m}^4 \\
 q_2 = 200 \text{ kN/m} & & 
 \end{array}$$

De oorsprong van het globale assenstelsel  $x, z$  wordt gekozen in knoop 1. De  $x$ -as loopt naar rechts, de  $z$ -as naar beneden.

Frame Studieverisie 04/04/1996 07:26:42 Opdracht 3

```

Krachteenheid      : kN          Lengte-eenheid      : m
Aantal staven      : 8           Aantal veren        : 0
Aantal knopen      : 9           Aantal BG           : 1
Aantal randvwn.    : 5           Aantal BC           : 0
Scheefstand        : 0           Analyse type        : FL+GL
Eigen gewicht van de constructie : 25500.00
    
```

```

Assen stelsel definitie :
0-----> X+
|
|          Positieve rotatie RY van Z+ naar X+
v Z+
    
```

Knoop coördinaten					
Knopnr	X	Z	Knopnr	X	Z
1	0.000	0.000	2	10.500	0.000
3	21.000	0.000	4	36.000	0.000
5	51.000	0.000	6	66.000	0.000
7	81.000	0.000	8	91.500	0.000

9 102.000 0.000

## Geometrische Profielgegevens

H=Hoogte, D=Diameter, Tb=dikte flens boven, To=dikte flens onder

Bb=Breedte boven, Bo=Breedte onder, Tl=dikte lijf

Prof	Type	H/D	Tb	To	Bb	Bo	Tl
------	------	-----	----	----	----	----	----

A1 A-prof 0.0000

## Profiel Eigenschappen

Code	A	I	Neta	E	S.G.	R	Prof pos	Mat
A1	1.000E+001	8.000E-001	0.000E+000	3.000E+007	25.0	Y	A1	Beton

## Staaftopologie

Stf	Code	I	J	NVM	Lengte	dx/dz	excIx	excIz	excJx	excJz
1	A1	1	2	111 111	10.50	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
2	A1	2	3	111 111	10.50	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
3	A1	3	4	111 111	15.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
4	A1	4	5	111 111	15.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
5	A1	5	6	111 111	15.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
6	A1	6	7	111 111	15.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
7	A1	7	8	111 111	10.50	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
8	A1	8	9	111 111	10.50	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00

## Randcondities

Knj	Cond	CX	CZ	CM
1	110			
3	010			
5	010			
7	010			
9	010			

## Staaflasten

BG : 1 q kN/m

Stfnr/	Knjnr	Type	Richting	Qbeg	Qend	A beg	A end
0/	1-2	Q	GZ	100.00	100.00	0.000	0.000
0/	2-3	Q	GZ	100.00	100.00	0.000	0.000
0/	3-4	Q	GZ	300.00	300.00	0.000	0.000
0/	4-5	Q	GZ	300.00	300.00	0.000	0.000
0/	5-6	Q	GZ	100.00	100.00	0.000	0.000
0/	6-7	Q	GZ	100.00	100.00	0.000	0.000
0/	7-8	Q	GZ	300.00	300.00	0.000	0.000
0/	8-9	Q	GZ	300.00	300.00	0.000	0.000

## Knooplasten

(Type : 1=Krachten , 2=Knoopverplaatsingen)

BG : 1 q kN/m

Knjnr	Type	Richting	Waarde
4	1	GZ	2400.00

## Staaftkrachten per staaf voor belastingsgevallen in lokaal assenstelsel

Stf	BG	Knj	FX	FZ	MY	Knj	FX	FZ	MY
1	1	1	0.000	79.857	0.000	2	0.000	-1129.857	-6351.001
2	1	2	0.000	1129.857	6351.001	3	0.000	-2179.857	-23727.004
3	1	3	0.000	-5772.710	23727.004	4	0.000	1272.710	29113.654
4	1	4	0.000	1127.290	-29113.654	5	0.000	-5627.290	-21545.689
5	1	5	0.000	-1981.848	21545.689	6	0.000	481.848	-3067.964
6	1	6	0.000	-481.848	3067.964	7	0.000	-1018.152	-7090.238
7	1	7	0.000	-3487.630	7090.238	8	0.000	337.630	12992.381
8	1	8	0.000	-337.630	-12992.381	9	0.000	-2812.370	0.000

## Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
-----	----	---------	----	----	----	---	---	---

1	1	0.000	0.000000	0.000000	-0.001852	0.000	-79.857	0.000
1	1	10.500	0.000000	-0.016698	-0.000865	0.000	-1129.857	-6351.001
2	1	0.000	0.000000	-0.016698	-0.000865	0.000	-1129.857	-6351.001
2	1	10.500	0.000000	0.000000	0.005313	0.000	-2179.857	-23727.004
3	1	0.000	0.000000	0.000000	0.005313	0.000	5772.710	-23727.004
3	1	15.000	0.000000	0.081978	0.000114	0.000	1272.710	29113.654
4	1	0.000	0.000000	0.081978	0.000114	0.000	-1127.290	29113.654
4	1	15.000	0.000000	0.000000	-0.005767	0.000	-5627.290	-21545.689
5	1	0.000	0.000000	0.000000	-0.005767	0.000	1981.848	-21545.689
5	1	15.000	0.000000	-0.023170	0.000753	0.000	481.848	-3067.964
6	1	0.000	0.000000	-0.023170	0.000753	0.000	481.848	-3067.964
6	1	15.000	0.000000	0.000000	0.002755	0.000	-1018.152	-7090.238
7	1	0.000	0.000000	0.000000	0.002755	0.000	3487.630	-7090.238
7	1	10.500	0.000000	0.023511	0.000258	0.000	337.630	12992.381
8	1	0.000	0.000000	0.023511	0.000258	0.000	337.630	12992.381
8	1	10.500	0.000000	0.000000	-0.003789	0.000	-2812.370	0.000

Knoopverplaatsingen per knoop voor BG

Knppnr	BG	UX	UZ	RY
1	1	0.000000	0.000000	0.001852
2	1	0.000000	-0.016698	0.000865
3	1	0.000000	0.000000	-0.005313
4	1	0.000000	0.081978	-0.000114
5	1	0.000000	0.000000	0.005767
6	1	0.000000	-0.023170	-0.000753
7	1	0.000000	0.000000	-0.002755
8	1	0.000000	0.023511	-0.000258
9	1	0.000000	0.000000	0.003789

Reactiekrachten voor BG per knoop

Knppnr	BG	FX	FZ	MY
1	1	0.000	79.857	0.000
3	1	0.000	-7952.567	0.000
5	1	0.000	-7609.138	0.000
7	1	0.000	-4505.782	0.000
9	1	0.000	-2812.370	0.000

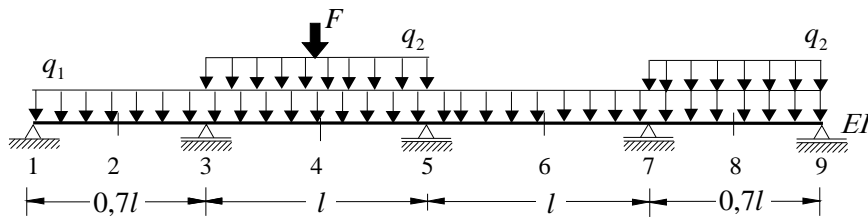
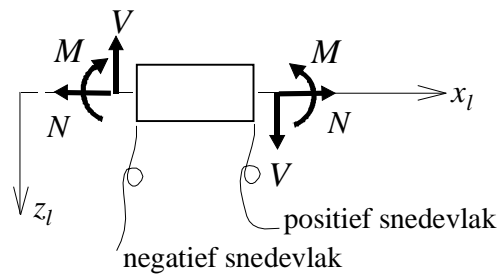
Totale evenwicht van de constructie per belastingsgeval

BG	Actie FX	React FX	Actie FZ	React FZ	Actie MY	React MY
1	0.000	0.000	22800.000	-22799.998	-1206900.000	1206900.000

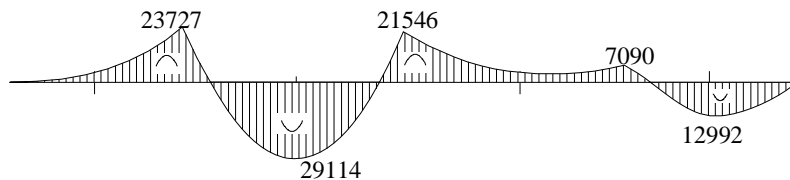
## Opdracht 4

Berekening met programma FRAME zoals hierboven vermeld.

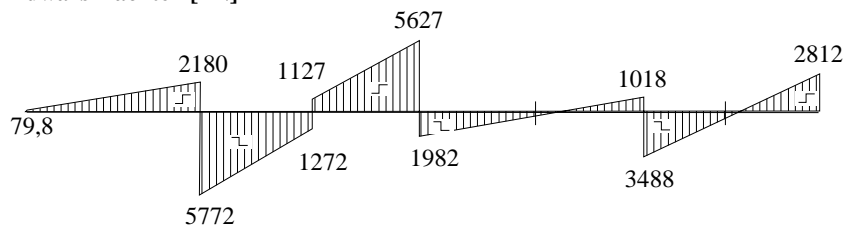
Keuze van lokaal staafassenstelsel:  $x_l$  loopt van de eerste knoop naar de tweede knoop. De  $z_l$ -as staat hier loodrecht op. In plot-uitvoer geeft het programma FRAME de richting van de  $x_l$ -as aan met een pijl. Afspraak voor positief moment en dwarskracht is in het lokale assenstelsel:



momentenlijn [kNm]



dwarskrachten [kN]

**Vraag a**

Som van verticale oplegreacties (zie uitvoer)

knoop 1	79,857 kN
knoop 3	-7952,567 kN
knoop 5	-7609,138 kN
knoop 7	-4505,782 kN
knoop 9	-2812,370 kN
Totaal	-22800,004 kN

Som van alle belasting:

$F$	=	2400 kN
$q_1 \times 3,4 l$	=	$100 \times 3,4 \times 30 = 10200$ kN
$q_2 \times 1,7 l$	=	$200 \times 1,7 \times 30 = 10200$ kN
Totaal	=	22800 kN

De som van de oplegreacties en de belasting is nul. Er is evenwicht.

**Vraag b**

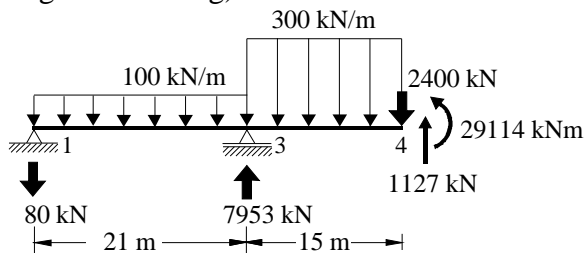
In de snede juist rechts van de puntlast zijn de waarden van het buigend moment en de dwarskracht:

$$M = 29114 \text{ kNm}$$

$$V = -1127 \text{ kN}$$

We beschouwen het constructiedeel links van de snede. We hebben dus met een positief snedevlak te maken. Een positief buigend moment  $M$  werkt daarop in de richting tegen de wijzers van de klok in. Een negatieve dwarskracht werkt op een positief snedevlak naar boven.

We bezien nu alle krachten en belasting op het beschouwde liggerdeel. De oplegreacties worden ontleend aan vraag a van deze opdracht (positief naar beneden; negatief omhoog).



Vertikaal evenwicht:

$$(21 \times 100 + 15 \times 300 + 2400 + 80) - (7953 + 1127) = 0$$

$$9080 - 9080 = 0 \quad \text{Klopt!}$$

Momentenevenwicht t.o.v. scharnieroplegging:

$$(100 \times 21 \times 10,5 + 300 \times 15 \times 28,5 + 2400 \times 36) -$$

$$(7953 \times 21 + 1127 \times 36 + 29114) =$$

$$236700 - 236699 = 000001 \quad \text{Klopt!}$$

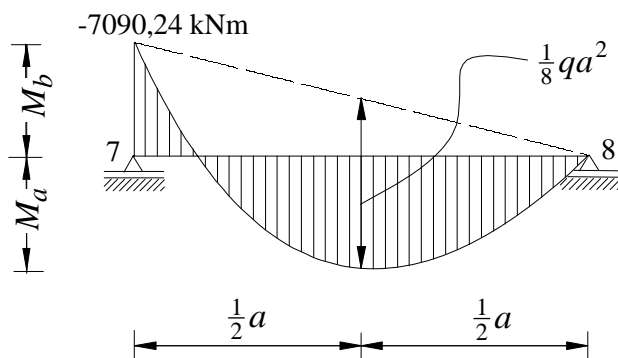
**Vraag c**

Momentenlijn in het vierde veld

Het moment moet nul zijn aan het rechteruiteinde. Dit klopt.

Je verwacht een positief veldmoment en een negatief moment boven de oplegging op knoop 7. Ook dit klopt.

De volgende controle op de momentenlijn is mogelijk:



met  $q = q_1 + q_2$

$$a = 0,7 l = 21 \text{ m}$$

$$q = 300 \text{ kN/m}$$

$$\frac{1}{8} qa^2 = 16537,5 \text{ kNm}$$

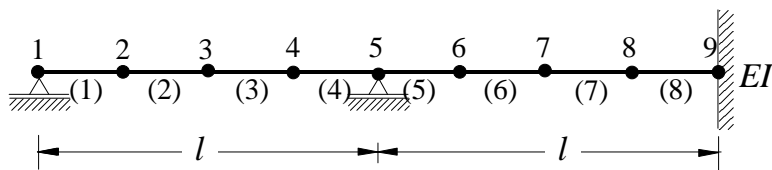
Het positieve moment  $M_a$  halverwege het veld is  $=12992,38$  kNm. Het moment  $M_b$  aan het linkereinde is  $-7090,24$  kNm. Er moet gelden:

$$M_a + \frac{1}{2}|M_b| = \frac{1}{8}qa^2$$

$$12992,38 + \frac{1}{2}(7090,24) = 16537,5 \text{ kNm}$$

Dit klopt perfect.

### Opdracht 5



Voor de brugligger geldt  $A = 3 \text{ m}^2$ ,  $I = 0,2 \text{ m}^4$ ,  $l = 20 \text{ m}$ ,  $E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ .

#### Vraag a

Voor het bepalen van de invloedslijn voor het buigend moment in knoop 3, wordt achtereenvolgens een last van  $F = 1 \text{ kN}$  op de knopen 1, 2, 3 ..... 9 aangebracht. Aangezien de knopen 1, 5 en 9 opleggingen zijn, wordt voor die posities van de puntlast geen berekening uitgevoerd.

Voor een eenheidslast van  $F = 1 \text{ kN}$  op knoop 2 levert het computerprogramma FRAME een moment  $M_3$  in knoop 3 ter grootte van  $1,830 \text{ kNm}$  (zie onderstaande uitvoer).

Frame Studieverisie 04/04/1996 07:29:38 Opdracht 5a

```

Krachteenheid      : kN          Lengte-eenheid      : m
Aantal staven      : 8           Aantal veren       : 0
Aantal knopen      : 9           Aantal BG          : 1
Aantal randvwn.    : 3           Aantal BC          : 0
Scheefstand        : 0           Analyse type       : FL+GL
Eigen gewicht van de constructie : 3000.00
  
```

Assen stelsel definitie :

```

0-----> X+
|
|          Positieve rotatie RY van Z+ naar X+
v Z+
  
```

Knoop coördinaten

Knppnr	X	Z	Knppnr	X	Z
1	0.000	0.000	2	5.000	0.000
3	10.000	0.000	4	15.000	0.000
5	20.000	0.000	6	25.000	0.000
7	30.000	0.000	8	35.000	0.000
9	40.000	0.000			

Profiel Eigenschappen

Code	A	I	Neta	E	S.G.	R	Prof	pos	Mat
------	---	---	------	---	------	---	------	-----	-----

A1 3.000E+000 2.000E-001 0.000E+000 3.000E+007 25.0 Y A1 Beton

Staaftopologie

Stf	Code	I	J	NVM	Lengte	dx/dz	excIx	excIz	excJx	excJz
-----<I>-----<J>-----										
1	A1	1	2	111 111	5.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
2	A1	2	3	111 111	5.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
3	A1	3	4	111 111	5.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
4	A1	4	5	111 111	5.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
5	A1	5	6	111 111	5.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
6	A1	6	7	111 111	5.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
7	A1	7	8	111 111	5.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
8	A1	8	9	111 111	5.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00

Randcondities

Knpr	Cond	CX	CZ	CM
-----				
1	010			
5	010			
9	111			

Knooplasten

(Type : 1=Krachten , 2=Knoopverplaatsingen)

BG : 1 punt last F = 1kN

Knprnr	Type	Richting	Waarde
-----			
2	1	GZ	1.00

Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
-----								
1	1	0.000	0.000000	0.000000	0.000003	0.000	0.683	0.000
1	1	5.000	0.000000	0.000012	0.000001	0.000	0.683	3.415
2	1	0.000	0.000000	0.000012	0.000001	0.000	-0.317	3.415
2	1	5.000	0.000000	0.000014	-0.000001	0.000	-0.317	1.830
3	1	0.000	0.000000	0.000014	-0.000001	0.000	-0.317	1.830
3	1	5.000	0.000000	0.000007	-0.000002	0.000	-0.317	0.246
4	1	0.000	0.000000	0.000007	-0.000002	0.000	-0.317	0.246
4	1	5.000	0.000000	0.000000	-0.000001	0.000	-0.317	-1.339
5	1	0.000	0.000000	0.000000	-0.000001	0.000	0.100	-1.339
5	1	5.000	0.000000	-0.000003	0.000000	0.000	0.100	-0.837
6	1	0.000	0.000000	-0.000003	0.000000	0.000	0.100	-0.837
6	1	5.000	0.000000	-0.000003	0.000000	0.000	0.100	-0.335
7	1	0.000	0.000000	-0.000003	0.000000	0.000	0.100	-0.335
7	1	5.000	0.000000	-0.000001	0.000000	0.000	0.100	0.167
8	1	0.000	0.000000	-0.000001	0.000000	0.000	0.100	0.167
8	1	5.000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000	0.100	0.670

Knoopverplaatsingen per knoop voor BG

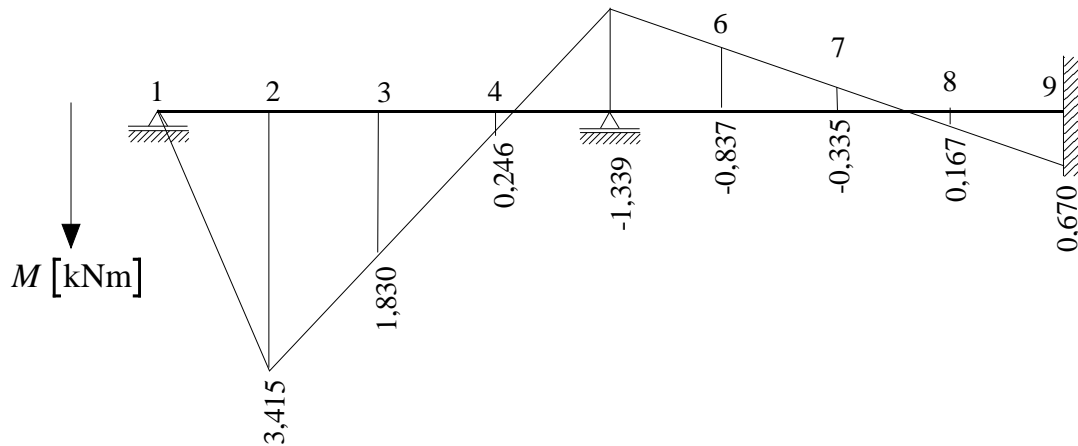
Knprnr	BG	UX	UZ	RY
-----				
1	1	0.000000	0.000000	-0.000003
2	1	0.000000	0.000012	-0.000001
3	1	0.000000	0.000014	0.000001
4	1	0.000000	0.000007	0.000002
5	1	0.000000	0.000000	0.000001
6	1	0.000000	-0.000003	0.000000
7	1	0.000000	-0.000003	0.000000
8	1	0.000000	-0.000001	0.000000
9	1	0.000000	0.000000	0.000000

Reactiekrachten voor BG per knoop

Knopnr	BG	FX	FZ	MY
1	1	0.000	-0.683	0.000
5	1	0.000	-0.417	0.000
9	1	0.000	0.100	0.670

Totale evenwicht van de constructie per belastingsgeval

BG	Actie FX	React FX	Actie FZ	React FZ	Actie MY	React MY
1	0.000	0.000	1.000	-1.000	-5.000	5.000

**M-lijn bij eenheidslast  $F = 1$  kN op punt 2.**

Hierna worden vervolgens alleen “de snedegrootheden” van de uitvoer van de berekeningen weergegeven.

**Voor eenheidslast  $F = 1$  kN op punt 3:**

Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
1	1	0.000	0.000000	0.000000	0.000003	0.000	0.393	0.000
1	1	5.000	0.000000	0.000014	0.000002	0.000	0.393	1.964
2	1	0.000	0.000000	0.000014	0.000002	0.000	0.393	1.964
2	1	5.000	0.000000	0.000019	0.000000	0.000	0.393	3.929
3	1	0.000	0.000000	0.000019	0.000000	0.000	-0.607	3.929
3	1	5.000	0.000000	0.000011	-0.000002	0.000	-0.607	0.893
4	1	0.000	0.000000	0.000011	-0.000002	0.000	-0.607	0.893
4	1	5.000	0.000000	0.000000	-0.000002	0.000	-0.607	-2.143
5	1	0.000	0.000000	0.000000	-0.000002	0.000	0.161	-2.143
5	1	5.000	0.000000	-0.000005	0.000000	0.000	0.161	-1.339
6	1	0.000	0.000000	-0.000005	0.000000	0.000	0.161	-1.339
6	1	5.000	0.000000	-0.000004	0.000000	0.000	0.161	-0.536
7	1	0.000	0.000000	-0.000004	0.000000	0.000	0.161	-0.536
7	1	5.000	0.000000	-0.000002	0.000001	0.000	0.161	0.268
8	1	0.000	0.000000	-0.000002	0.000001	0.000	0.161	0.268
8	1	5.000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000	0.161	1.071

**Voor eenheidslast  $F = 1$  kN op punt 4:**



Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
1	1	0.000	0.000000	0.000000	0.000002	0.000	0.156	0.000
1	1	5.000	0.000000	0.000007	0.000001	0.000	0.156	0.781
2	1	0.000	0.000000	0.000007	0.000001	0.000	0.156	0.781
2	1	5.000	0.000000	0.000011	0.000000	0.000	0.156	1.562
3	1	0.000	0.000000	0.000011	0.000000	0.000	0.156	1.562
3	1	5.000	0.000000	0.000009	-0.000001	0.000	0.156	2.344
4	1	0.000	0.000000	0.000009	-0.000001	0.000	-0.844	2.344
4	1	5.000	0.000000	0.000000	-0.000002	0.000	-0.844	-1.875
5	1	0.000	0.000000	0.000000	-0.000002	0.000	0.141	-1.875
5	1	5.000	0.000000	-0.000004	0.000000	0.000	0.141	-1.172
6	1	0.000	0.000000	-0.000004	0.000000	0.000	0.141	-1.172
6	1	5.000	0.000000	-0.000004	0.000000	0.000	0.141	-0.469
7	1	0.000	0.000000	-0.000004	0.000000	0.000	0.141	-0.469
7	1	5.000	0.000000	-0.000001	0.000000	0.000	0.141	0.234
8	1	0.000	0.000000	-0.000001	0.000000	0.000	0.141	0.234
8	1	5.000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000	0.141	0.937

**Voor eenheidslast  $F = 1$  kN op punt 6:**

Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
1	1	0.000	0.000000	0.000000	-0.000001	0.000	-0.060	0.000
1	1	5.000	0.000000	-0.000003	-0.000001	0.000	-0.060	-0.301
2	1	0.000	0.000000	-0.000003	-0.000001	0.000	-0.060	-0.301
2	1	5.000	0.000000	-0.000005	0.000000	0.000	-0.060	-0.603
3	1	0.000	0.000000	-0.000005	0.000000	0.000	-0.060	-0.603
3	1	5.000	0.000000	-0.000004	0.000000	0.000	-0.060	-0.904
4	1	0.000	0.000000	-0.000004	0.000000	0.000	-0.060	-0.904
4	1	5.000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000	-0.060	-1.205
5	1	0.000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000	0.723	-1.205
5	1	5.000	0.000000	0.000007	0.000001	0.000	0.723	2.411
6	1	0.000	0.000000	0.000007	0.000001	0.000	-0.277	2.411
6	1	5.000	0.000000	0.000007	-0.000001	0.000	-0.277	1.027
7	1	0.000	0.000000	0.000007	-0.000001	0.000	-0.277	1.027
7	1	5.000	0.000000	0.000003	-0.000001	0.000	-0.277	-0.357
8	1	0.000	0.000000	0.000003	-0.000001	0.000	-0.277	-0.357
8	1	5.000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000	-0.277	-1.741

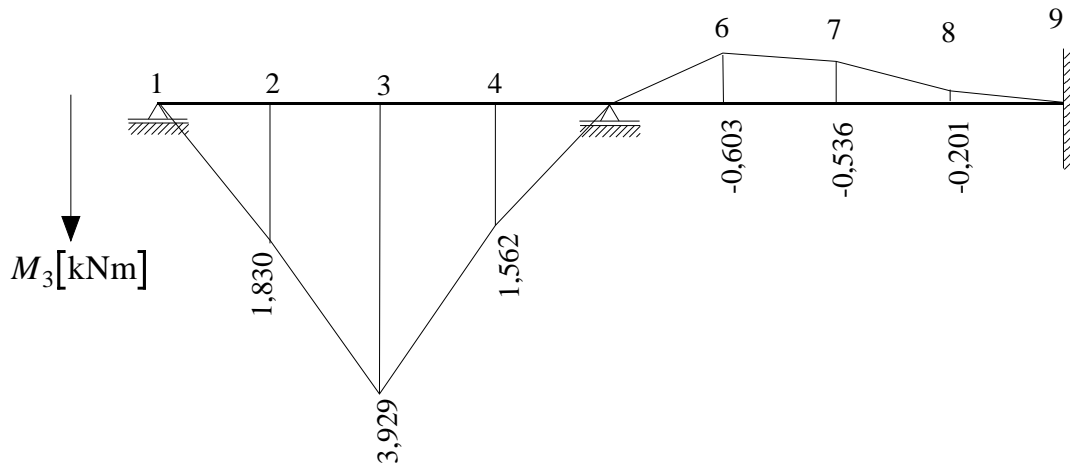
**Voor eenheidslast  $F = 1$  kN op punt 7:**

Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)								
Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
1	1	0.000	0.000000	0.000000	-0.000001	0.000	-0.054	0.000
1	1	5.000	0.000000	-0.000003	0.000000	0.000	-0.054	-0.268
2	1	0.000	0.000000	-0.000003	0.000000	0.000	-0.054	-0.268
2	1	5.000	0.000000	-0.000004	0.000000	0.000	-0.054	-0.536
3	1	0.000	0.000000	-0.000004	0.000000	0.000	-0.054	-0.536
3	1	5.000	0.000000	-0.000004	0.000000	0.000	-0.054	-0.804
4	1	0.000	0.000000	-0.000004	0.000000	0.000	-0.054	-0.804
4	1	5.000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000	-0.054	-1.071
5	1	0.000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000	0.393	-1.071
5	1	5.000	0.000000	0.000007	0.000001	0.000	0.393	0.893
6	1	0.000	0.000000	0.000007	0.000001	0.000	0.393	0.893
6	1	5.000	0.000000	0.000010	0.000000	0.000	0.393	2.857
7	1	0.000	0.000000	0.000010	0.000000	0.000	-0.607	2.857
7	1	5.000	0.000000	0.000005	-0.000001	0.000	-0.607	-0.179
8	1	0.000	0.000000	0.000005	-0.000001	0.000	-0.607	-0.179
8	1	5.000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000	-0.607	-3.214

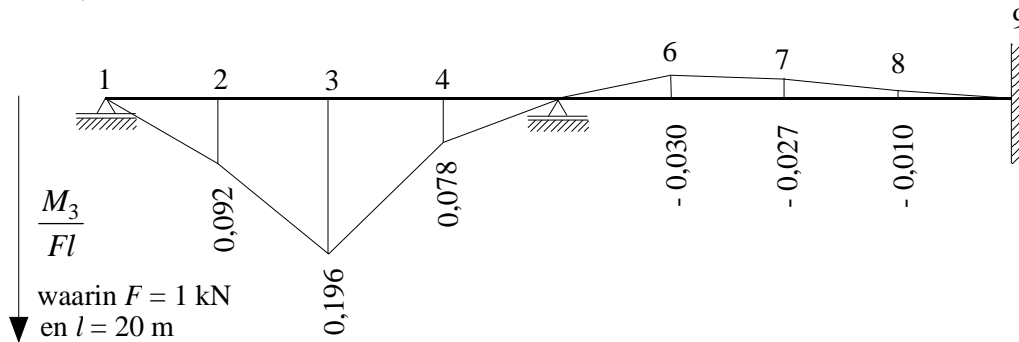
**Voor eenheidslast  $F = 1$  kN op punt 8:**

Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)								
Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
1	1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000	-0.020	0.000
1	1	5.000	0.000000	-0.000001	0.000000	0.000	-0.020	-0.100
2	1	0.000	0.000000	-0.000001	0.000000	0.000	-0.020	-0.100
2	1	5.000	0.000000	-0.000002	0.000000	0.000	-0.020	-0.201
3	1	0.000	0.000000	-0.000002	0.000000	0.000	-0.020	-0.201
3	1	5.000	0.000000	-0.000001	0.000000	0.000	-0.020	-0.301
4	1	0.000	0.000000	-0.000001	0.000000	0.000	-0.020	-0.301
4	1	5.000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000	-0.020	-0.402
5	1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000	0.116	-0.402
5	1	5.000	0.000000	0.000003	0.000001	0.000	0.116	0.179
6	1	0.000	0.000000	0.000003	0.000001	0.000	0.116	0.179
6	1	5.000	0.000000	0.000005	0.000000	0.000	0.116	0.759
7	1	0.000	0.000000	0.000005	0.000000	0.000	0.116	0.759
7	1	5.000	0.000000	0.000003	-0.000001	0.000	0.116	1.339
8	1	0.000	0.000000	0.000003	-0.000001	0.000	-0.884	1.339
8	1	5.000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000	-0.884	-3.080

De invloedslijn van het buigend moment  $M_3$  in knoop 3 wordt als volgt uiteengezet:



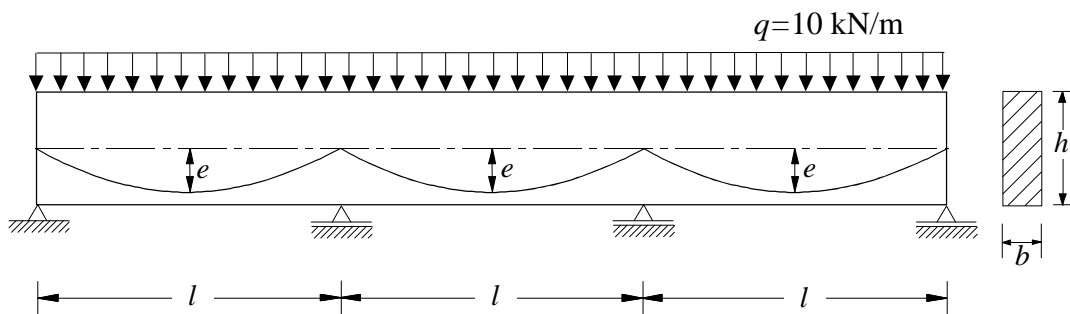
Deze invloedslijnen kunnen we dimensieloos maken door te delen door  $Fl$  (met  $F=1\text{kN}$  en  $l=20\text{ m}$ ).



**Vraag b**

De waarden van  $A$ ,  $I$  en  $E$  doen er niet toe in een prismatische ligger. De grootte van  $l$  komt lineair terug in de grootte van het buigend moment  $M_3$ .

**Opdracht 6**

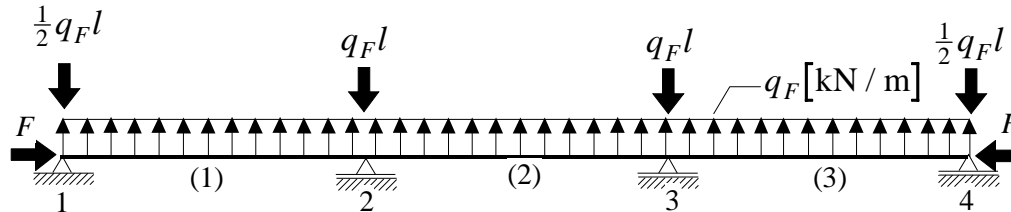
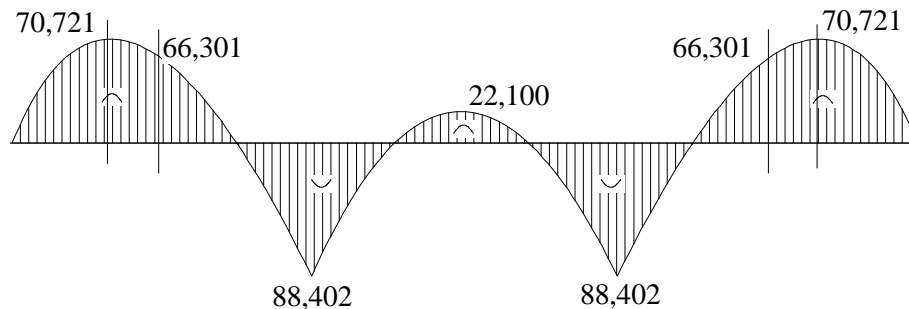
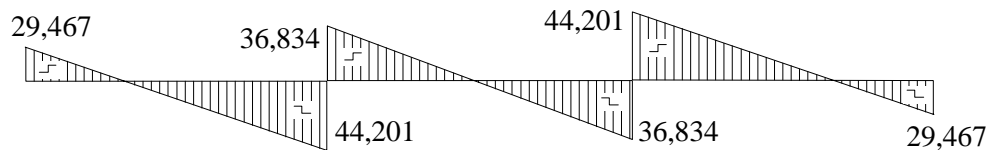


$$e = 0,17 \text{ m} \quad l = 12,0 \text{ m} \quad F = 650 \text{ kN} \quad q_F = \frac{8Fe}{l^2} = 6,138888 \text{ kN/m}$$

$$b = 0,25 \text{ m} \quad h = 0,50 \text{ m} \quad q_F l = 73,666666 \text{ kN}$$

**Vraag a:**

Met behulp van computerprogramma FRAME worden de momentenlijn en dwarskrachtenlijn onder voorspanbelasting bepaald (zie opdracht 6a).

**Momentenlijn [kNm]****Dwarskrachtenlijn [kN]****Normaalkrachtenlijn [kN]**

Frame Studieverisie 04/04/1996 08:50:05 Opdracht 6a

Krachtenheid	: kN	Lengte-eenheid	: m
Aantal staven	: 3	Aantal veren	: 0
Aantal knopen	: 4	Aantal BG	: 1
Aantal randvwn.	: 4	Aantal BC	: 0
Scheefstand	: 0	Analyse type	: FL+GL
Eigen gewicht van de constructie			: 112.50

Assen stelsel definitie :

```

0-----> X+
|
|          Positieve rotatie RY van Z+ naar X+
|
v Z+

```

Knoop coördinaten

Knopnr	X	Z	Knopnr	X	Z
1	0.000	0.000	2	12.000	0.000
3	24.000	0.000	4	36.000	0.000

Geometrische Profielgegevens, H=Hoogte, D=Diameter, Tb=dikte flens boven, To=dikte flens onder, Bb=Breedte boven, Bo=Breedte onder, Tl=dikte lijf

Prof	Type	H/D	Tb	To	Bb	Bo	Tl
A1	RH-prof	0.5000		0.2500			

Profiel Eigenschappen

Code	A	I	Neta	E	S.G.	R	Prof pos	Mat
A1	1.250E-001	2.604E-003	0.000E+000	3.000E+007	25.0	Y	A1	Beton

Staaftopologie

Stf	Code	I	J	NVM	Lengte	dx/dz	excIx	excIz	excJx	excJz
				<I>-<J>						
1	A1	1	2	111 111	12.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
2	A1	2	3	111 111	12.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
3	A1	3	4	111 111	12.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00

Randcondities

Knpr	Cond	CX	CZ	CM
1	110			
2	010			
3	010			
4	010			

Staaflasten

BG : 1 Voorspanning

Stfnr/	Knprnr	Type	Richting	Qbeg	Qend	A beg	A end
0/	1-2	Q	GZ	-6.14	-6.14	0.000	0.000
0/	2-3	Q	GZ	-6.14	-6.14	0.000	0.000
0/	3-4	Q	GZ	-6.14	-6.14	0.000	0.000

Knooplasten (Type : 1=Krachten , 2=Knoopverplaatsingen)

BG : 1 Voorspanning

Knprnr	Type	Richting	Waarde
1	1	GZ	36.83
1	1	GX	650.00
2	1	GZ	73.67
3	1	GZ	73.67
4	1	GZ	36.83
4	1	GX	-650.00

Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
1	1	0.000	0.000000	0.000000	-0.003395	-650.000	-29.467	0.000
1	1	6.000	-0.001040	-0.011033	0.000566	-650.000	7.367	-66.301
1	1	12.000	-0.002080	0.000000	0.001132	-650.000	44.201	88.402
2	1	0.000	-0.002080	0.000000	0.001132	-650.000	-36.834	88.402
2	1	6.000	-0.003120	-0.000849	0.000000	-650.000	0.000	-22.100
2	1	12.000	-0.004160	0.000000	-0.001132	-650.000	36.834	88.402
3	1	0.000	-0.004160	0.000000	-0.001132	-650.000	-44.201	88.402
3	1	6.000	-0.005200	-0.011033	-0.000566	-650.000	-7.367	-66.301
3	1	12.000	-0.006240	0.000000	0.003395	-650.000	29.467	0.000

Knoopverplaatsingen per knoop voor BG

Knprnr	BG	UX	UZ	RY
1	1	0.000000	0.000000	0.003395
2	1	-0.002080	0.000000	-0.001132
3	1	-0.004160	0.000000	0.001132
4	1	-0.006240	0.000000	-0.003395

Reactiekrachten voor BG per knoop

Knprnr	BG	FX	FZ	MY
--------	----	----	----	----

1	1	0.000	-7.366	0.000
2	1	0.000	7.368	0.000
3	1	0.000	7.368	0.000
4	1	0.000	-7.366	0.000

Totale evenwicht van de constructie per belastingsgeval

BG	Actie FX	React FX	Actie FZ	React FZ	Actie MY	React MY
1	0.000	0.000	-0.004	0.004	0.072	-0.072

**Vraag b**

Som van reactiekrachten

Knoop 1	-7,366 kN
Knoop 2	7,368 kN
Knoop 3	7,368 kN
Knoop 4	-7,366 kN

$$\Sigma F_z = -0,004 \text{ kN}$$

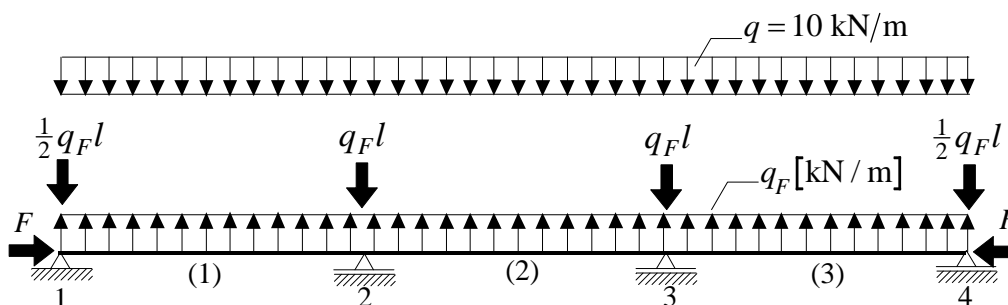
Som van alle belastingen

Knoop 1	$\frac{1}{2} q_F l =$	36,83333 kN
Knoop 2	$q_F l =$	73,66666 kN
Knoop 3	$q_F l =$	73,66666 kN
Knoop 4	$\frac{1}{2} q_F l =$	36,83333 kN
Voorspanbelasting	$q_F \cdot 3l =$	-220,99999 kN
Totale belasting		= -0,00001 kN

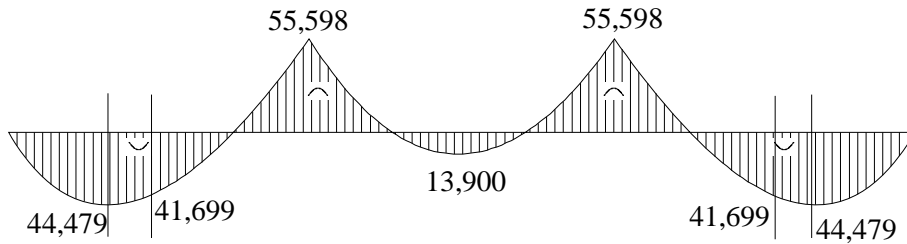
Totale verticale belasting = Som van verticale reactiekrachten = 0 kN

**Vraag c**

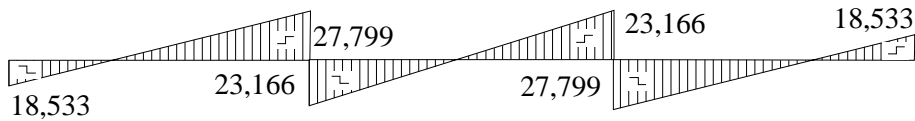
Met behulp van het computerprogramma FRAME zijn de momentenlijn en dwarskrachtenlijn onder voorspanbelasting en uitwendige belasting  $q = 10 \text{ kN/m}$  bepaald (zie opdracht 6c).



**Momentenlijn [kNm]**



**Dwarskrachtenlijn [kN]**



**Normaalkrachtenlijn [kN]**



.. INVOERGEGEVENS ZIJN DEZELFDE ALS VOOR OPDRACHT 6A, ALLEEN HIER WORDT DE .. UITWENDIGE BELASTING  $q = 10 \text{ kN/m}$  TOEGEVOEGD.

SCIA Frame Studieverisie 04/04/1996 09:01:02 Opdracht 6c

Krachtenheid : kN      Lengte-eenheid : m  
 Aantal staven : 3      Aantal veren : 0  
 Aantal knopen : 4      Aantal BG : 1  
 Aantal randvwn. : 4      Aantal BC : 0  
 Scheefstand : 0      Analyse type : FL+GL  
 Eigen gewicht van de constructie : 112.50

Assen stelsel definitie :  
 0-----> X+  
 |  
 |      Positieve rotatie RY van Z+ naar X+  
 v Z+

Knoop coördinaten

Knpnr	X	Z	Knpnr	X	Z
1	0.000	0.000	2	12.000	0.000
3	24.000	0.000	4	36.000	0.000

Geometrische Profielgegevens, H=Hoogte, D=Diameter, Tb=dikte flens boven, To=dikte flens onder, Bb=Breedte boven, Bo=Breedte onder, Tl=dikte lijf

Prof	Type	H/D	Tb	To	Bb	Bo	Tl
A1	RH-prof	0.5000					0.2500

Profiel Eigenschappen

Code	A	I	Neta	E	S.G.	R	Prof pos	Mat
A1	1.250E-001	2.604E-003	0.000E+000	3.000E+007	25.0	Y	A1	Beton

Staaftopologie

Stf	Code	I	J	NVM	Lengte	dx/dz	excIx	excIz	excJx	excJz
1	A1	1	2	111 111	12.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
2	A1	2	3	111 111	12.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
3	A1	3	4	111 111	12.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00

Randcondities

Kn timer	Cond	CX	CZ	CM
1	110			
2	010			
3	010			
4	010			

## Staaflasten

BG : 1 Voorspanning en uitw.bel. q

Stf nr / Kn timer	Type	Richting	Qbeg	Qend	A beg	A end
0/ 1-2	Q	GZ	-6.14	-6.14	0.000	0.000
0/ 1-2	Q	GZ	10.00	10.00	0.000	0.000
0/ 2-3	Q	GZ	-6.14	-6.14	0.000	0.000
0/ 2-3	Q	GZ	10.00	10.00	0.000	0.000
0/ 3-4	Q	GZ	-6.14	-6.14	0.000	0.000
0/ 3-4	Q	GZ	10.00	10.00	0.000	0.000

## Knooplasten

(Type : 1=Krachten , 2=Knoopverplaatsingen)

BG : 1 Voorspanning en uitw.bel. q

Kn timer	Type	Richting	Waarde
1	1	GZ	36.83
1	1	GX	650.00
2	1	GZ	73.67
3	1	GZ	73.67
4	1	GZ	36.83
4	1	GX	-650.00

## Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
1	1	0.000	0.000000	0.000000	0.002135	-650.000	18.533	0.000
1	1	6.000	-0.001040	0.006939	-0.000356	-650.000	-4.633	41.699
1	1	12.000	-0.002080	0.000000	-0.000712	-650.000	-27.799	-55.598
2	1	0.000	-0.002080	0.000000	-0.000712	-650.000	23.166	-55.598
2	1	6.000	-0.003120	0.000534	0.000000	-650.000	0.000	13.900
2	1	12.000	-0.004160	0.000000	0.000712	-650.000	-23.166	-55.598
3	1	0.000	-0.004160	0.000000	0.000712	-650.000	27.799	-55.598
3	1	6.000	-0.005200	0.006939	0.000356	-650.000	4.633	41.699
3	1	12.000	-0.006240	0.000000	-0.002135	-650.000	-18.533	0.000

## Knoopverplaatsingen per knoop voor BG

Kn timer	BG	UX	UZ	RY
1	1	0.000000	0.000000	-0.002135
2	1	-0.002080	0.000000	0.000712
3	1	-0.004160	0.000000	-0.000712
4	1	-0.006240	0.000000	0.002135

## Reactiekrachten voor BG per knoop

Kn timer	BG	FX	FZ	MY
1	1	0.000	-55.366	0.000
2	1	0.000	-124.632	0.000
3	1	0.000	-124.632	0.000
4	1	0.000	-55.366	0.000

## Totale evenwicht van de constructie per belastingsgeval

BG	Actie FX	React FX	Actie FZ	React FZ	Actie MY	React MY
1	0.000	0.000	359.996	-359.996	-6479.928	6479.928

**Vraag d**



Som van reactiekrachten		Som van alle belastingen	
Knoop 1	-55,366 kN	Knoop 1	$\frac{1}{2} q_F l = 36,83333$ kN
Knoop 2	-124,362 kN	Knoop 2	$q_F l = 73,66666$ kN
Knoop 3	-124,362 kN	Knoop 3	$q_F l = 73,66666$ kN
Knoop 4	-55,366 kN	Knoop 4	$\frac{1}{2} q_F l = 36,83333$ kN
		Voorspanbelasting $q \cdot 3l$	= -220,99999 kN
		Uitwendige belasting $q_F \cdot 3l$	= 360,00000 kN
<hr/>		<hr/>	
$\Sigma F_z$	= -359,996 kN	Totale belasting	359,99999 kN
	=		

Totale verticale belasting = Som van verticale reactiekrachten = 360,0 kN

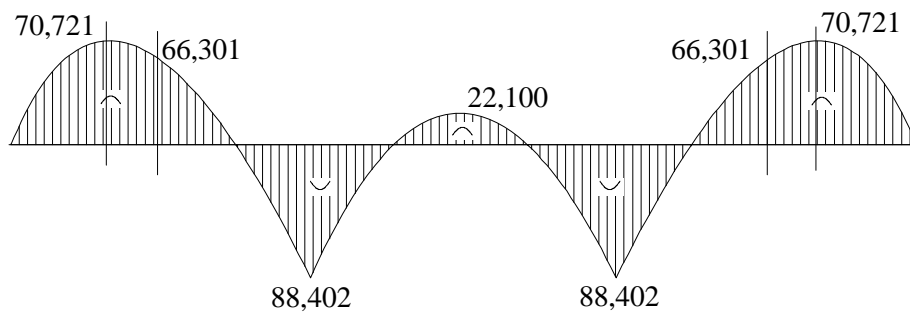
**Vraag e, alleen voorspanning**

Eerst worden de algemene gegevens van de doorsnede van de ligger bepaald. Oppervlak van de doorsnede  $A = b h = 0,25 \times 0,50 = 0,125 \text{ m}^2$

Weerstandmoment  $W = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} \times 0,25 \times (0,50)^2 = 0,01042 \text{ m}^3$ .

Ten gevolge van alleen voorspanning verloopt de momentenlijn als volgt :

**Momentenlijn ten gevolge van voorspanning [kNm]**



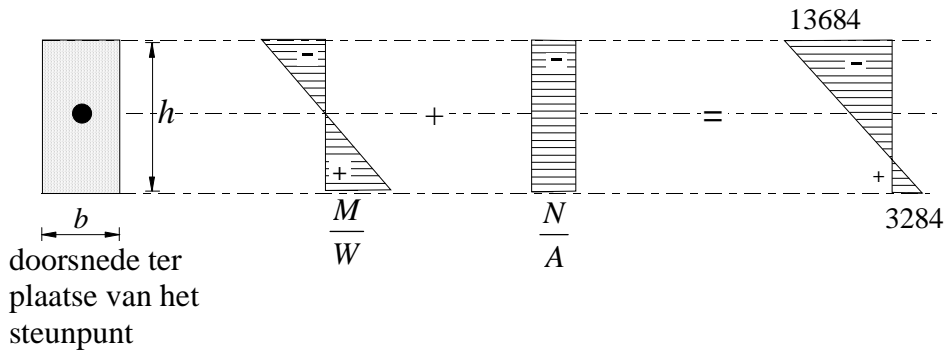
Doorsnede boven de steunpunten :

Ter plaatse van de beide steunpunten geldt voor het buigend moment  $M$  en de normaalkracht  $N$ :

$$M = 88,402 \text{ kNm}$$

$$N = -650 \text{ kN}$$

De spanningsverdeling in de doorsnede boven het steunpunt wordt daarmee:



$$\sigma_{\text{boven}} = -\frac{M}{W} + \frac{N}{A} = -\frac{88,402}{0,01042} - \frac{650}{0,125} = -8484 - 5200 = \underline{\underline{-13684 \text{ kN/m}^2}}$$

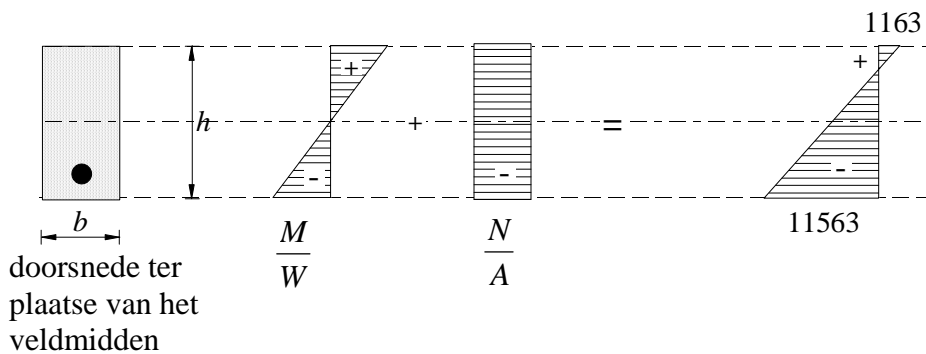
$$\sigma_{\text{onder}} = +\frac{M}{W} + \frac{N}{A} = +\frac{88,402}{0,01042} - \frac{650}{0,125} = +8484 - 5200 = \underline{\underline{3284 \text{ kN/m}^2}}$$

#### Doorsnede in het midden van de eindvelden

Hier geldt de uitvoer:

$$M = -66,301 \text{ kNm}$$

$$N = -650 \text{ kN}$$



$$\sigma_{\text{boven}} = -\frac{M}{W} + \frac{N}{A} = +\frac{66,301}{0,01042} - \frac{650}{0,125} = +6363 - 5200 = \underline{\underline{+1163 \text{ kN/m}^2}}$$

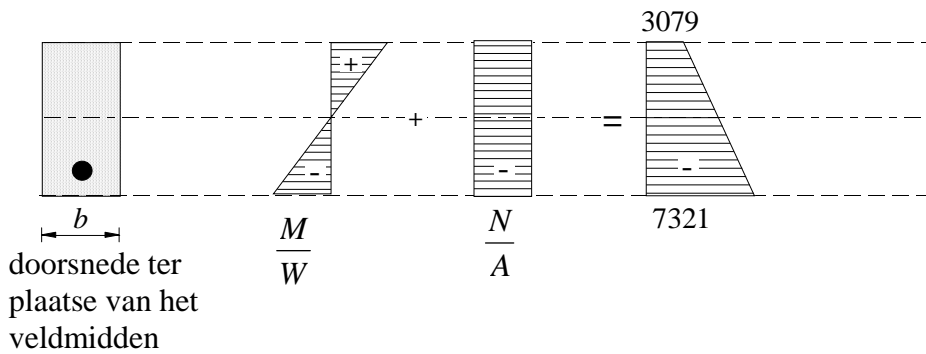
$$\sigma_{\text{onder}} = +\frac{M}{W} + \frac{N}{A} = -\frac{66,301}{0,01042} - \frac{650}{0,125} = -6363 - 5200 = \underline{\underline{-11563 \text{ kN/m}^2}}$$

#### Doorsnede in het midden van het middenveld

Hier geldt de uitvoer:

$$M = -22,100 \text{ kNm}$$

$$N = -650 \text{ kN}$$



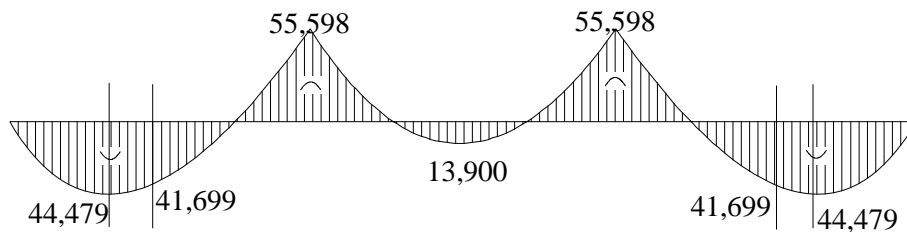
$$\sigma_{\text{boven}} = -\frac{M}{W} + \frac{N}{A} = +\frac{22,100}{0,01042} - \frac{650}{0,125} = +2121 - 5200 = \underline{-3079 \text{ kN / m}^2}$$

$$\sigma_{\text{onder}} = +\frac{M}{W} + \frac{N}{A} = -\frac{22,100}{0,01042} - \frac{650}{0,125} = -2121 - 5200 = \underline{-7321 \text{ kN / m}^2}$$

**Vraag e, voorspanning én belasting**

Ten gevolge van voorspanning en uitwendige belasting verloopt de momentenlijn als volgt :

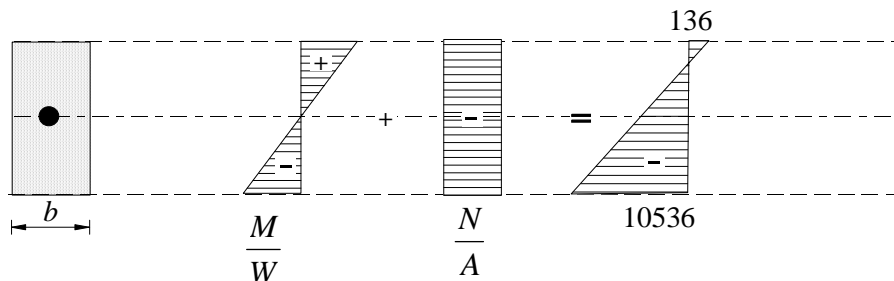
**Momentenlijn ten gevolge van voorspanning en uitwendige belasting**



Doorsnede boven de steunpunten

$$M = -55,598 \text{ kNm}$$

$$N = -650 \text{ kN}$$



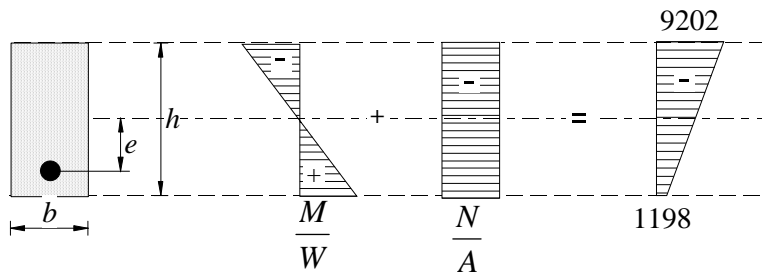
$$\sigma_{\text{boven}} = -\frac{M}{W} + \frac{N}{A} = +\frac{55,598}{0,01042} - \frac{650}{0,125} = +5336 - 5200 = \underline{+136 \text{ kN / m}^2}$$

$$\sigma_{\text{onder}} = +\frac{M}{W} + \frac{N}{A} = -\frac{55,598}{0,01042} - \frac{650}{0,125} = -5336 - 5200 = \underline{-10536 \text{ kN / m}^2}$$

Doorsnede in het midden van de eindvelden

$$M = 41,699 \text{ kNm}$$

$$N = -650 \text{ kN}$$



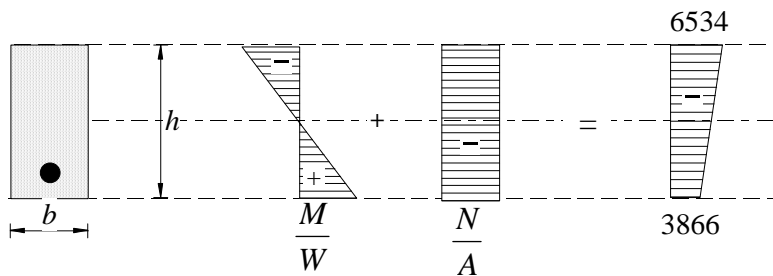
$$\sigma_{\text{boven}} = -\frac{M}{W} + \frac{N}{A} = -\frac{41,699}{0,01042} - \frac{650}{0,125} = -4002 - 5200 = \underline{\underline{-9202 \text{ kN/m}^2}}$$

$$\sigma_{\text{onder}} = +\frac{M}{W} + \frac{N}{A} = +\frac{41,699}{0,01042} - \frac{650}{0,125} = +4002 - 5200 = \underline{\underline{-1198 \text{ kN/m}^2}}$$

Doorsnede in het midden van het middenveld

$$M = 13,900 \text{ kNm}$$

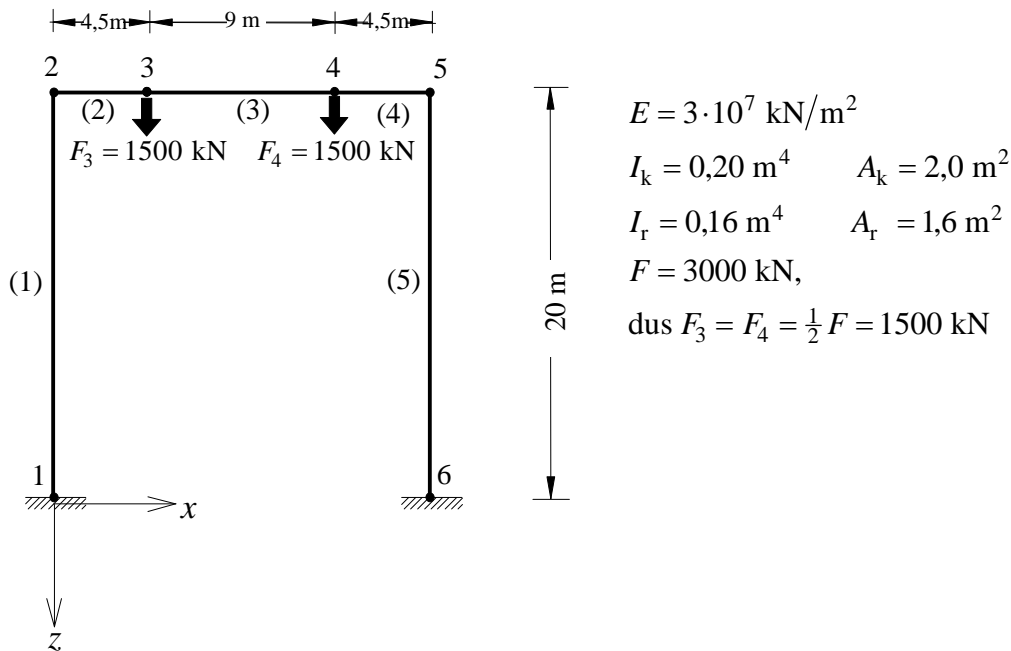
$$N = -650 \text{ kN}$$



$$\sigma_{\text{boven}} = -\frac{M}{W} + \frac{N}{A} = -\frac{13,900}{0,01042} - \frac{650}{0,125} = -1334 - 5200 = \underline{\underline{-6534 \text{ kN/m}^2}}$$

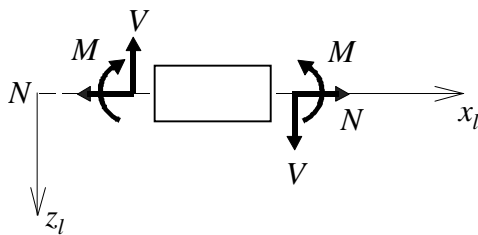
$$\sigma_{\text{onder}} = +\frac{M}{W} + \frac{N}{A} = +\frac{13,900}{0,01042} - \frac{650}{0,125} = +1334 - 5200 = \underline{\underline{-3866 \text{ kN/m}^2}}$$

**Opdracht 1**



De berekening is uitgevoerd met het programma FRAME. De oorsprong van het assenstelsel is linksonder gekozen. De  $x$ -as loopt naar rechts, de  $z$ -as naar beneden.

Per staaf wordt een lokaal assenstelsel  $x_l, z_l$  gekozen. De  $x_l$ -as valt samen met de staafas en loopt van de eerstgenoemde knoop naar de laatstgenoemde knoop. De  $z_l$ -as staat er loodrecht op. De tekenafpraak voor de snedegrootheden  $N, M$  en  $V$  is gedefinieerd in het lokale assenstelsel:



Frame Studieverisie 04/04/1996 09:35:45 Opdracht 1

Krachtenheid	: kN	Lengte-eenheid	: m
Aantal staven	: 5	Aantal veren	: 0
Aantal knopen	: 6	Aantal BG	: 1
Aantal randvwn.	: 2	Aantal BC	: 0
Scheefstand	: 0	Analyse type	: FL+GL
Eigen gewicht van de constructie			: 2720.00

Assen stelsel definitie :

```

0-----> X+
|
|          Positieve rotatie RY van Z+ naar X+
v Z+
Knoop coördinaten
    
```

Knppnr	X	Z	Knppnr	X	Z
1	0.000	0.000	2	0.000	-20.000
3	4.500	-20.000	4	13.500	-20.000
5	18.000	-20.000	6	18.000	0.000

## Profiel Eigenschappen

Code	A	I	Neta	E	S.G.	R	Prof pos	Mat
AK	2.000E+000	2.000E-001	0.000E+000	3.000E+007	25.0	Y	AK	Beton
AR	1.600E+000	1.600E-001	0.000E+000	3.000E+007	25.0	Y	AR	Beton

## Staaftopologie

Stf	Code	I	J	NVM	Lengte	dx/dz	excIx	excIz	excJx	excJz
				<I>-<J>						
1	AK	1	2	111 111	20.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	AR	2	3	111 111	4.50	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
3	AR	3	4	111 111	9.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
4	AR	4	5	111 111	4.50	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
5	AK	5	6	111 111	20.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

## Randcondities

Knppnr	Cond	CX	CZ	CM
1	111			
6	111			

## Knooplasten

(Type : 1=Krachten , 2=Knoopverplaatsingen)

BG : 1 Puntlast F

Knppnr	Type	Richting	Waarde
3	1	GZ	1500.00
4	1	GZ	1500.00

## Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
1	1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000	-1500.000	-262.647	1749.506
1	1	20.000	-0.000500	0.000049	0.002923	-1500.000	-262.647	-3503.444
2	1	0.000	0.000049	0.000500	0.002923	-262.647	1500.000	-3503.444
2	1	4.500	0.000025	0.016299	0.003044	-262.647	1500.000	3246.556
3	1	0.000	0.000025	0.016299	0.003044	-262.647	0.000	3246.556
3	1	9.000	-0.000025	0.016299	-0.003044	-262.647	0.000	3246.556
4	1	0.000	-0.000025	0.016299	-0.003044	-262.647	-1500.000	3246.556
4	1	4.500	-0.000049	0.000500	-0.002923	-262.647	-1500.000	-3503.444
5	1	0.000	0.000500	0.000049	-0.002923	-1500.000	262.647	-3503.444
5	1	20.000	0.000000	0.000000	0.000000	-1500.000	262.647	1749.506

## Knoopverplaatsingen per knoop voor BG

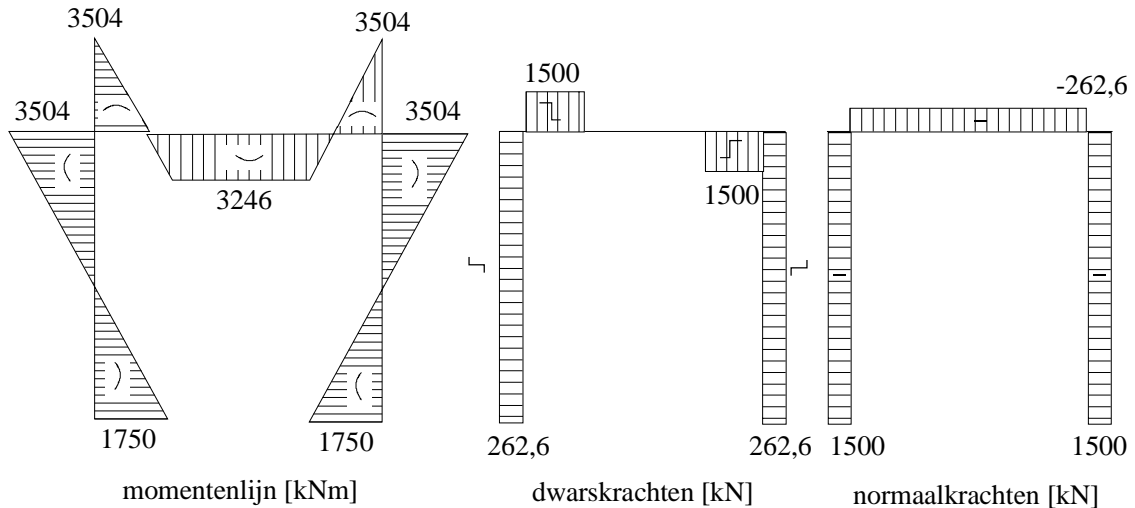
Knppnr	BG	UX	UZ	RY
1	1	0.000000	0.000000	0.000000
2	1	0.000049	0.000500	-0.002923
3	1	0.000025	0.016299	-0.003044
4	1	-0.000025	0.016299	0.003044
5	1	-0.000049	0.000500	0.002923
6	1	0.000000	0.000000	0.000000

Reactiekrachten voor BG per knoop

Knpnr	BG	FX	FZ	MY
1	1	262.647	-1500.000	-1749.506
6	1	-262.647	-1500.000	1749.506

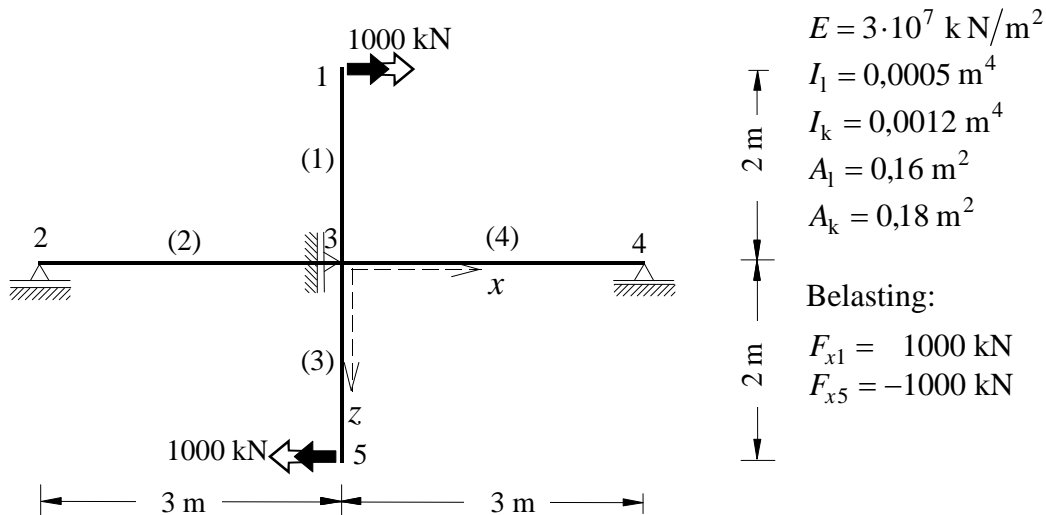
Totale evenwicht van de constructie per belastingsgeval

BG	Actie FX	React FX	Actie FZ	React FZ	Actie MY	React MY
1	0.000	0.000	3000.000	-3000.000	-27000.000	27000.000



**Opdracht 2**

We kiezen een wijze van opleggen voor het kruisje, die symmetrisch is ten opzichte van het midden.



De oorsprong van het  $x,z$ -assenstelsel wordt gekozen in het snijpunt van de ligger en de kolom. De voorgeschreven verplaatsingen zijn:

$$\begin{aligned}
 u_{z2} &= 0 \\
 u_{x3} &= 0 \\
 u_{z4} &= 0
 \end{aligned}$$

Frame Studieverisie 28/05/1996 15:57:44 Opdracht 2

Krachtenheid : kN Lengte-eenheid : m  
 Aantal staven : 4 Aantal veren : 0  
 Aantal knopen : 5 Aantal BG : 1  
 Aantal randvwn. : 3 Aantal BC : 0  
 Scheefstand : 0 Analyse type : FL+GL  
 Eigen gewicht van de constructie : 42.00

Assen stelsel definitie :

0-----> X+  
 |  
 | Positieve rotatie RY van Z+ naar X+  
 v Z+

Knoop coördinaten

Knpnr	X	Z	Knpnr	X	Z
1	0.000	-2.000	2	-3.000	0.000
3	0.000	0.000	4	3.000	0.000
5	0.000	2.000			

Profiel Eigenschappen

Code	A	I	Neta	E	S.G.	R	Prof pos	Mat
AK	1.800E-001	1.200E-003	0.000E+000	3.000E+007	25.0	Y	AK	Beton
AL	1.600E-001	5.000E-004	0.000E+000	3.000E+007	25.0	Y	AL	Beton

Staaftopologie

Stf	Code	I	J	NVM	Lengte	dx/dz	excIx	excIz	excJx	excJz
1	AK	1	3	111 111	2.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	AL	2	3	111 111	3.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
3	AK	3	5	111 111	2.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4	AL	3	4	111 111	3.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00

Randcondities

Knp	Cond	CX	CZ	CM
3	100			
2	010			
4	010			

Knooplasten

(Type : 1=Krachten , 2=Knoopverplaatsingen)

BG : 1 Puntlast F

Knpnr	Type	Richting	Waarde
1	1	GX	1000.00
5	1	GX	-1000.00

Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
1	1	0.000	0.000000	-0.340741	0.188889	0.000	1000.000	0.000
1	1	2.000	0.000000	0.000000	0.133333	0.000	1000.000	2000.000
2	1	0.000	0.000000	0.000000	-0.066667	0.000	-666.667	0.000
2	1	3.000	0.000000	0.000000	0.133333	0.000	-666.667	-2000.000
3	1	0.000	0.000000	0.000000	0.133333	0.000	1000.000	-2000.000
3	1	2.000	0.000000	0.340741	0.188889	0.000	1000.000	0.000
4	1	0.000	0.000000	0.000000	0.133333	0.000	-666.667	2000.000
4	1	3.000	0.000000	0.000000	-0.066667	0.000	-666.667	0.000

Knoopverplaatsingen per knoop voor BG

Knpnr	BG	UX	UZ	RY
-------	----	----	----	----



1	1	0.340741	0.000000	-0.188889
2	1	0.000000	0.000000	0.066667
3	1	0.000000	0.000000	-0.133333
4	1	0.000000	0.000000	0.066667
5	1	-0.340741	0.000000	-0.188889

Reactiekrachten voor BG per knoop

Knopnr	BG	FX	FZ	MY
2	1	0.000	666.667	0.000
3	1	0.000	0.000	0.000
4	1	0.000	-666.667	0.000

Totale evenwicht van de constructie per belastingsgeval

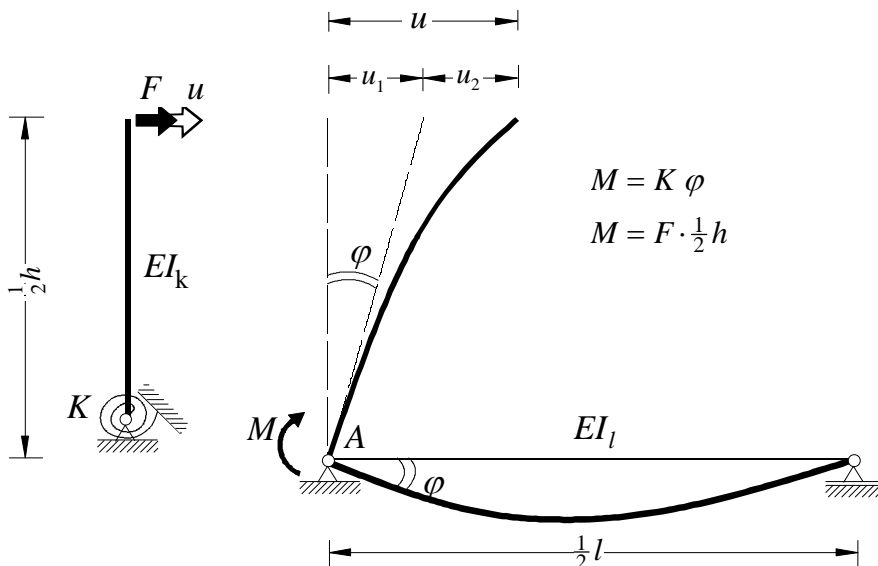
BG	Actie FX	React FX	Actie FZ	React FZ	Actie MY	React MY
1	0.000	0.000	0.000	0.000	-4000.000	4000.000

Uit de berekening volgen gelijke maar tegengestelde waarden voor  $u_{x1}$  en  $u_{x5}$ . De gezochte stijfheid  $K$  is:

$$K = \frac{F_{x1}}{u_{x1}} \left( = \frac{F_{x5}}{u_{x5}} \right) = \frac{1000}{0,34074} = 2935 \text{ kN/m}$$

### Opdracht 3

Controle van 'kruisje'-stijfheid met handberekening. Om redenen van symmetrie kunnen we volstaan met het beschouwen van één ligger en één kolom. We voeren het symbool  $K$  in voor de stijfheid van de rotatieveer en het symbool  $\varphi$  voor de rotatie van de veer. De veerstijfheid  $K$  wordt geleverd door de horizontale ligger.



Berekening van  $\varphi$  uit de vervorming van de ligger bij een eindmoment  $M$  met de grootte  $\frac{1}{2}Fh$ :

$$\varphi = \frac{M \cdot \frac{1}{2}l}{3EI_l} = \frac{(F \cdot \frac{1}{2}h)(\frac{1}{2}l)}{3EI_l} = \frac{1}{12} \frac{Fhl}{EI_l}$$

Berekening van  $u_1$  tengevolge van de rotatie:

$$u_1 = \varphi \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{12} \frac{Fhl}{EI_l} \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{24} \frac{Fh^2l}{EI_l}$$

Berekening van  $u_2$  door vervorming van de kolom:

$$u_2 = \frac{F \cdot (\frac{1}{2}h)^3}{3EI_k} = \frac{1}{24} \frac{Fh^3}{EI_k}$$

Totale verplaatsing:

$$u = u_1 + u_2 = \frac{1}{24} \frac{Fh^3}{EI_k} \left( \frac{l}{h} \frac{I_k}{I_l} + 1 \right)$$

Conclusie:

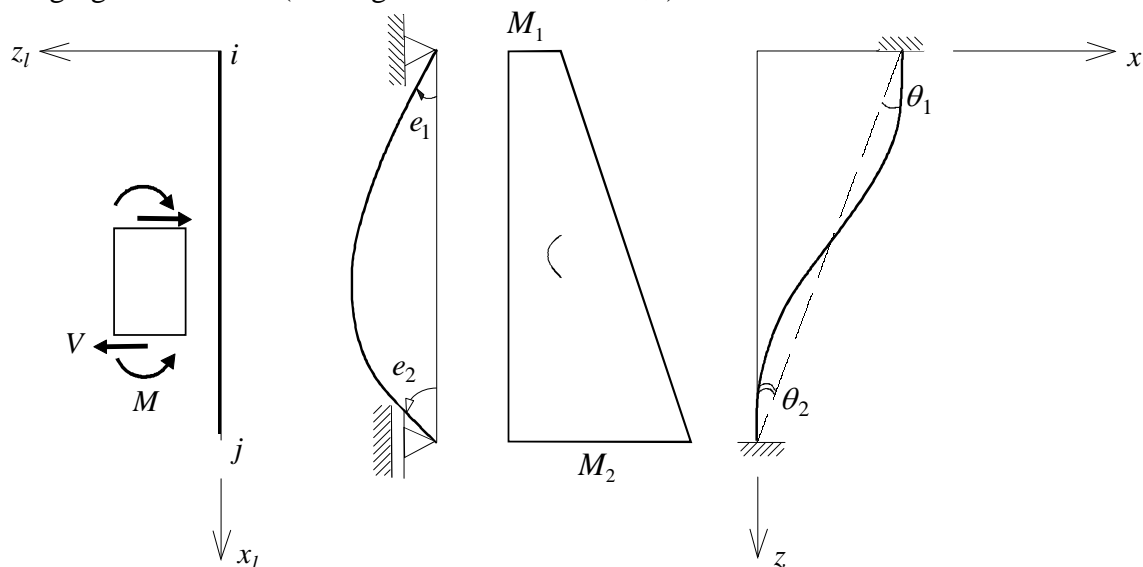
$$K = \frac{24EI_k}{h^3 \left( 1 + \frac{l}{h} \frac{I_k}{I_l} \right)}$$

Invullen:

$$K = \frac{24 \times 3 \cdot 10^7 \times 0,0012}{4^3 \left( 1 + \frac{6}{4} \cdot \frac{0,0012}{0,0005} \right)} = 2935 \text{ kN/m} \quad \text{Klopt!}$$

#### Opdracht 5.4

Bepaling van de eerste kolom van de stijfheidsmatrix voor een verticale staaf die op buiging wordt belast (in het globale assenstelsel  $x, z$ ).



Uit de figuur lezen we af:

$$\theta_1 = \frac{1}{l} u_{xi} \quad \text{met } u_{xi} = 1$$

$$\theta_2 = \frac{1}{l} u_{xi} \quad \text{met } u_{xi} = 1$$

Vergelijken van de hoekverdraaiingen  $e$  en  $\theta$  leert:

$$e_1 = -\theta_1 = -\frac{1}{l} u_{xi}$$

$$e_2 = \theta_2 = \frac{1}{l} u_{xi}$$

Hieruit volgt voor de buigende momenten:

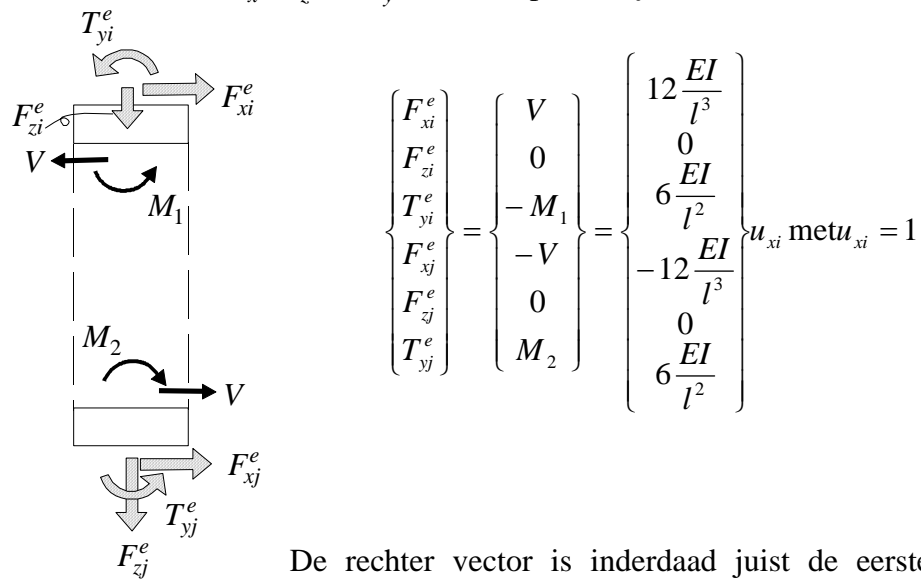
$$M_1 = (4e_1 - 2e_2) \frac{EI}{l} = -\frac{6EI}{l^2} u_{xi}$$

$$M_2 = (-2e_1 + 4e_2) \frac{EI}{l} = \frac{6EI}{l^2} u_{xi}$$

De dwarskracht wordt berekend met:

$$V = \frac{M_2 - M_1}{l} = -\frac{12 EI}{l^3} u_{xi}$$

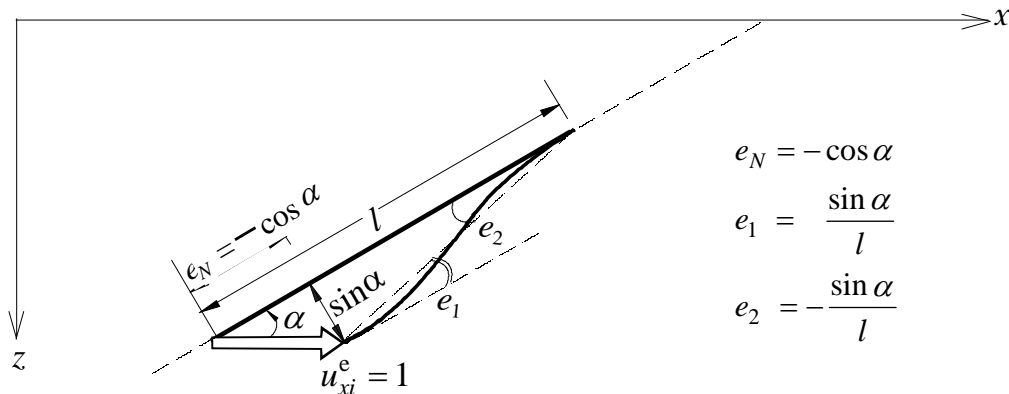
We willen vervolgens een relatie leggen tussen de drie parameters  $M_1$ ,  $M_2$  en  $V$  en de elementkrachten  $F_x^e$ ,  $F_z^e$  en  $T_y^e$  in de knopen  $i$  en  $j$ .



De rechter vector is inderdaad juist de eerste kolom van de element-stijfheidsmatrix (5.12).

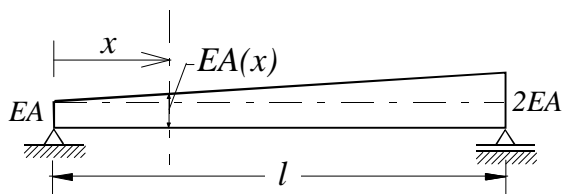


**Opdracht 1**



De eerste kolom van  $\mathbf{B}$  is dus  $\begin{Bmatrix} -\cos \alpha \\ \frac{\sin \alpha}{l} \\ \frac{\sin \alpha}{l} \end{Bmatrix}$

**Opdracht 2**



De doorsnede van de staaf verloopt van  $A$  naar  $2A$  over de lengte  $l$ .  
Op een afstand  $x$  van de linkeroplegging is de rekstijfheid:

$$EA(x) = \left(1 + \frac{x}{l}\right)EA$$

De flexibiliteitsterm  $C_N$  is volgens vergelijking (6.8) gedefinieerd:

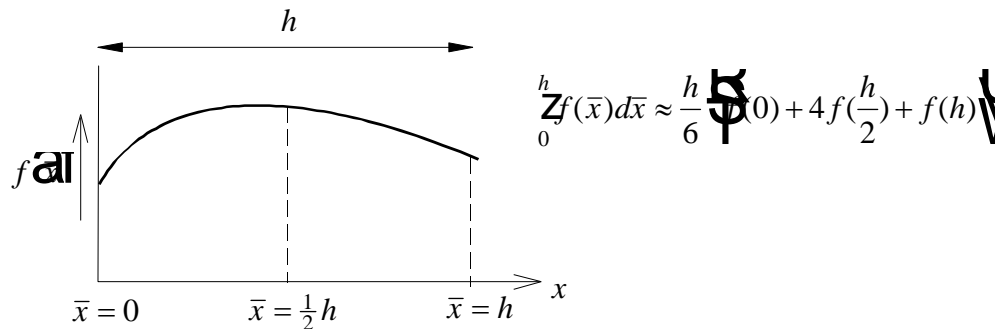
$$C_N = \int_0^l \frac{1}{EA(x)} dx = \frac{1}{EA} \int_0^l \frac{1}{1 + \frac{x}{l}} dx$$

We kiezen voor  $x/l$  het symbool  $\bar{x}$ . Dan geldt dat  $\bar{x}$  loopt van 0 naar 1 en dat  $dx$  mag worden vervangen door  $l d\bar{x}$ . De uitdrukking voor  $C_N$  wordt dan:

$$C_N = \frac{l}{EA} \int_0^1 \frac{1}{1 + \bar{x}} d\bar{x}$$

De integraal hierin zullen we numeriek bepalen.

Bij numeriek integreren wordt het domein verdeeld in een of meer intervallen van de grootte  $h$ . Per interval wordt de integraal bepaald met de regel van Simpson:



De opdracht luidt om slechts één interval te kiezen, dus is  $h$  gelijk aan 1.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+\bar{x}} d\bar{x} &= \\ &= \frac{h}{6} \left\{ f(0) + 4f\left(\frac{h}{2}\right) + f(h) \right\} \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{1+0} + 4 \times \frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+1} \right\} \\ &= \frac{1}{6} \left\{ 1 + \frac{8}{3} + \frac{1}{2} \right\} \\ &= \frac{25}{36} (= 0,6944) \end{aligned}$$

Voor  $C_N$  vinden we dus:

$$C_N = \frac{25}{36} \frac{l}{EA}$$

Hieruit volgt:

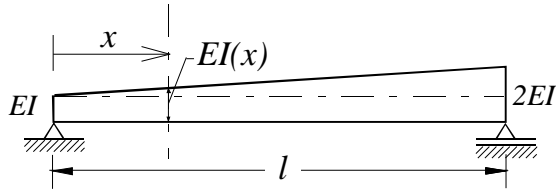
$$D_N = \frac{1}{C_N} = \frac{36}{25} \frac{EA}{l}$$

In het bijzondere geval van deze opdracht hadden we de integraal ook exact kunnen bepalen. Dat gaat als volgt:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+\bar{x}} d\bar{x} &= \\ \int_0^1 \frac{1}{1+\bar{x}} d(1+\bar{x}) &= \ln(1+\bar{x}) \Big|_0^1 \\ &= \{\ln(2) - \ln(1)\} = \ln(2) = 0,6931 \end{aligned}$$

De oplossing 0,6944 met behulp van de regel van Simpson met één interval over de gehele lengte wijkt slechts 2% af. Hadden we twee intervallen gebruikt, dan vinden we langs numerieke weg de waarde 0,6933, dus een zeer nauwkeurige uitkomst.

**Opdracht 3**



De buigstijfheid verloopt lineair over de overspanning  $l$  (van  $EI$  naar  $2EI$ ).  
Op een afstand  $x$  van de linkeroplegging is de buigstijfheid:

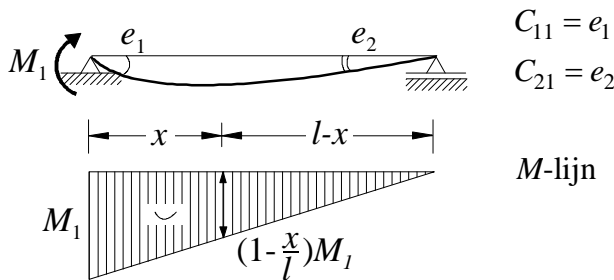
$$EI(x) = \left(1 + \frac{x}{l}\right)EI$$

Volgens vergelijking (6.11) geldt:

$$e_1 = \int_0^l \frac{M(x)}{EI(x)} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx$$

$$e_2 = \int_0^l \frac{M(x)}{EI(x)} \cdot \frac{x}{l} dx$$

Bij eindmoment  $M_1$



$$M(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)M_1$$

Nu worden de termen  $C_{11}$  en  $C_{21}$  als volgt bepaald:

$$C_{11} = e_1 = \int_0^l \frac{M(x)}{EI(x)} \cdot \frac{l-x}{l} dx = \int_0^l \frac{M_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{EI \left(1 + \frac{x}{l}\right)} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx = \frac{M_1 l}{EI} \int_0^1 \frac{(1-\bar{x})^2}{1+\bar{x}} d\bar{x}$$

waarin  $x/l = \bar{x}$ , dus  $dx = l d\bar{x}$ .

Oplossen van de integraal met behulp van de methode Simpson met één interval:

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{(1-0)^2}{1+0} + 4 \times \frac{(1-\frac{1}{2})^2}{1+\frac{1}{2}} + \frac{(1-1)^2}{1+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{6} (1 + \frac{2}{3} + 0) = \frac{5}{18} \rightarrow C_{11} = \frac{5}{18} \frac{l}{EI} M_1 \left( = 0,277 \frac{l}{EI} M_1 \right)$$

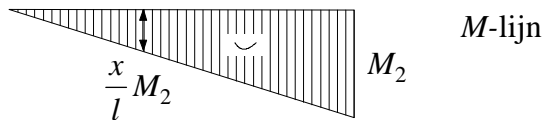
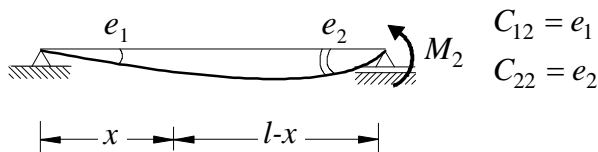
$$C_{21} = e_2 = \int_0^l \frac{M(x)}{EI(x)} \cdot \frac{x}{l} dx = \int_0^l \frac{M_1 (1 - \frac{x}{l})}{EI \left( 1 + \frac{x}{l} \right)} \cdot \frac{x}{l} dx = \frac{M_1 l}{EI} \int_0^1 \frac{(1-\bar{x})\bar{x}}{1+\bar{x}} d\bar{x}$$

Oplossen van de integraal met behulp van de methode Simpson:

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{(1-0) \cdot 0}{1+0} + 4 \times \frac{(1-\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} + \frac{(1-1) \cdot 1}{1+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{6} (0 + \frac{2}{3} + 0) = \frac{1}{9} \rightarrow C_{21} = \frac{1}{9} \frac{l}{EI} M_1 \left( = 0,111 \frac{l}{EI} M_1 \right)$$

Bij eindmoment  $M_2$



$$M(x) = \frac{x}{l} M_2$$

Nu worden de termen  $C_{12}$  en  $C_{22}$  als volgt bepaald:

$$C_{12} = e_1 = \int_0^l \frac{M(x)}{EI(x)} \cdot \left( 1 - \frac{x}{l} \right) dx = \int_0^l \frac{M_2 \frac{x}{l}}{EI \left( 1 + \frac{x}{l} \right)} \left( 1 - \frac{x}{l} \right) dx = \frac{M_2 l}{EI} \int_0^1 \frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{1+\bar{x}} d\bar{x}$$

Oplossen van de integraal met behulp van de methode van Simpson:

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{0 \cdot (1-0)}{1+0} + 4 \times \frac{\frac{1}{2} \cdot (1-\frac{1}{2})}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1 \cdot (1-1)}{1+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{6} (0 + \frac{2}{3} + 0) \rightarrow C_{12} = \frac{1}{9} \frac{l}{EI} M_2 \left( = 0,111 \frac{l}{EI} M_2 \right)$$



$$C_{22} = e_2 = \int_0^l \frac{M(x)}{EI(x)} \cdot \frac{x}{l} dx = \int_0^l \frac{M_2 \frac{x}{l}}{EI \left(1 + \frac{x}{l}\right)} \cdot \frac{x}{l} dx = \frac{M_2 l}{EI} \int_0^1 \frac{(\bar{x})^2}{1 + \bar{x}} d\bar{x}$$

Oplossen van de integraal met behulp van de methode Simpson:

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{0^2}{1+0} + 4 \times \frac{(\frac{1}{2})^2}{1+\frac{1}{2}} + \frac{(1)^2}{1+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{6} \left( 0 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{36} \rightarrow C_{22} = \frac{7}{36} \frac{l}{EI} M_2 \left( = 0,194 \frac{l}{EI} M_2 \right)$$

Deze flexibiliteitsfactoren worden in de flexibiliteitsrelatie volgens vergelijking (6.9) ingevoerd :

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \text{ ofwel } C = \frac{l}{EI} \begin{bmatrix} \frac{5}{18} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{7}{36} \end{bmatrix} = \frac{1}{36} \frac{l}{EI} \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

De stijfheidsmatrix  $D$  wordt bepaald door het berekenen van de inverse van flexibiliteitsmatrix  $C$ .

$$D = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{14}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{20}{3} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$$

Het bepalen van de integralen voor  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{21}$  en  $C_{22}$  kan in dit bijzondere geval ook weer met behulp van klassiek integreren worden gedaan. We laten de uitwerking daarvan hier achterwege en geven direct de exacte uitkomsten :

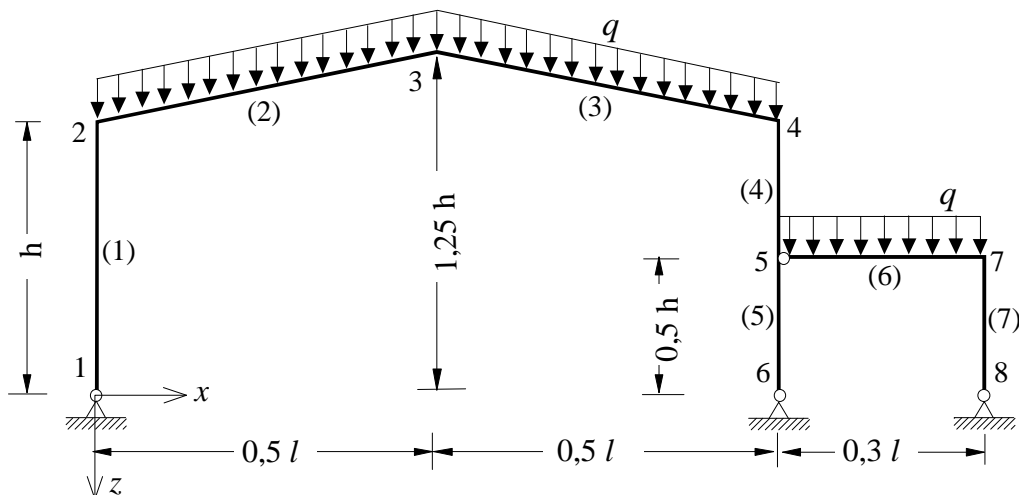
$$\text{Voor } C_{11} \quad : \quad -2 \frac{1}{2} + 4 \ln 2 = 0,273$$

$$\text{Voor } C_{12} \text{ en } C_{21} \quad : \quad 1 \frac{1}{2} - 2 \ln 2 = 0,113$$

$$\text{Voor } C_{22} \quad : \quad -\frac{1}{2} + \ln 2 = 0,193$$

Ook nu blijken de fouten bij het numeriek integreren slechts 2% te zijn.

#### Opdracht 4



$$h = 6 \text{ m}$$

$$l = 16 \text{ m}$$

$$q = 10 \text{ kN/m}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{Hoofdspan: HE 400A}$$

$$\text{Aanleunspan: HE 200A}$$

De berekening is uitgevoerd met het programma FRAME. De oorsprong van het assenstelsel ligt linksonder. De  $x$ -as loopt naar rechts, de  $z$ -as naar beneden. Voor de tekenafspraken van  $N$ ,  $M$  en  $V$ , zie uitwerking van opdracht 1 van hoofdstuk 5.

Frame Studieverisie 04/04/1996 10:25:30 Opdracht 4

Krachtenheid : kN Lengte-eenheid : m  
 Aantal staven : 7 Aantal veren : 0  
 Aantal knopen : 8 Aantal BG : 1  
 Aantal randvwn. : 3 Aantal BC : 0  
 Scheefstand : 0 Analyse type : FL+GL  
 Eigen gewicht van de constructie : 38.59

Assen stelsel definitie :

0-----> X+  
 |  
 | Positieve rotatie RY van Z+ naar X+  
 v Z+

Knoop coördinaten

Knpnr	X	Z	Knpnr	X	Z
1	0.000	0.000	2	0.000	-6.000
3	8.000	-7.500	4	16.000	-6.000
5	16.000	-3.000	6	16.000	0.000
7	20.800	-3.000	8	20.800	0.000

Geometrische Profielgegevens

H=Hoogte, D=Diameter, Tb=dikte flens boven, To=dikte flens onder

Bb=Breedte boven, Bo=Breedte onder, Tl=dikte lijf

Prof	Type	H/D	Tb	To	Bb	Bo	Tl
HEA400	I-prof	0.3000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
HEA200	I-prof	0.2000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Profiel Eigenschappen

Code	A	I	Neta	E	S.G.	R	Prof pos	Mat
A2	1.590E-002	8.560E-005	0.000E+000	2.100E+008	78.5	Z	HEA400	Staal
A1	5.380E-003	1.340E-005	0.000E+000	2.100E+008	78.5	Z	HEA200	Staal

Staaftopologie

Stf	Code	I	J	NVM	Lengte	dx/dz	excIx	excIz	excJx	excJz
1	A2	1	2	111 111	6.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	A2	2	3	111 111	8.14	-5.33	0.00	0.00	0.00	0.00
3	A2	3	4	111 111	8.14	5.33	0.00	0.00	0.00	0.00
4	A2	4	5	111 111	3.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5	A2	5	6	111 111	3.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
6	A1	5	7	110 111	4.80	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
7	A1	7	8	111 111	3.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Randcondities

Knp	Cond	CX	CZ	CM
1	110			
6	110			
8	110			

Staaflasten

BG : 1 Puntlast F

Stfnr/ Knpnr	Type	Richting	Qbeg	Qend	A beg	A end
0/ 2-3	Q	GZ	10.00	10.00	0.000	0.000
0/ 3-4	Q	GZ	10.00	10.00	0.000	0.000
0/ 5-7	Q	GZ	10.00	10.00	0.000	0.000

Snedegrootheden per staaft voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
1	1	0.000	0.000000	0.000000	-0.017917	-82.927	-29.549	0.000
1	1	3.000	-0.000075	-0.046355	-0.010520	-82.927	-29.549	-88.646
1	1	6.000	-0.000149	-0.048328	0.011671	-82.927	-29.549	-177.291

2	1	0.000	-0.047528	-0.008760	0.011671	-44.325	76.061	-177.291
2	1	4.070	-0.047577	0.079127	0.022911	-36.825	36.061	50.861
2	1	8.139	-0.047618	0.132651	0.000926	-29.325	-3.939	116.225
3	1	0.000	0.003671	0.140891	0.000926	-28.760	6.952	116.225
3	1	4.070	0.003632	0.093021	-0.022447	-36.260	-33.048	63.123
3	1	8.139	0.003583	-0.000509	-0.015371	-43.760	-73.048	-152.766
4	1	0.000	0.000160	-0.003615	-0.015371	-79.861	29.549	-152.766
4	1	1.500	0.000125	-0.018036	-0.004473	-79.861	29.549	-108.443
4	1	3.000	0.000089	-0.018882	0.002727	-79.861	29.549	-64.120
5	1	0.000	0.000089	-0.018882	0.002727	-98.752	21.373	-64.120
5	1	1.500	0.000044	-0.011448	0.006740	-98.752	21.373	-32.060
5	1	3.000	0.000000	0.000000	0.008078	-98.752	21.373	0.000
6	1	0.000	0.018882	0.000089	0.009401	-8.175	18.891	0.000
6	1	2.400	0.018865	0.012096	-0.001745	-8.175	-5.109	16.537
6	1	4.800	0.018848	0.000077	-0.002433	-8.175	-29.109	-24.525
7	1	0.000	0.000077	-0.018848	-0.002433	-29.109	8.175	-24.525
7	1	1.500	0.000039	-0.014326	0.007372	-29.109	8.175	-12.263
7	1	3.000	0.000000	0.000000	0.010640	-29.109	8.175	0.000

## Knoopverplaatsingen per knoop voor BG

Knppnr	BG	UX	UZ	RY
1	1	0.000000	0.000000	0.017917
2	1	-0.048328	0.000149	-0.011671
3	1	-0.022356	0.139154	-0.000926
4	1	0.003615	0.000160	0.015371
5	1	0.018882	0.000089	-0.002727
6	1	0.000000	0.000000	-0.008078
7	1	0.018848	0.000077	0.002433
8	1	0.000000	0.000000	-0.010640

## Reactiekrachten voor BG per knoop

Knppnr	BG	FX	FZ	MY
1	1	29.549	-82.927	0.000
6	1	-21.373	-98.752	0.000
8	1	-8.175	-29.109	0.000

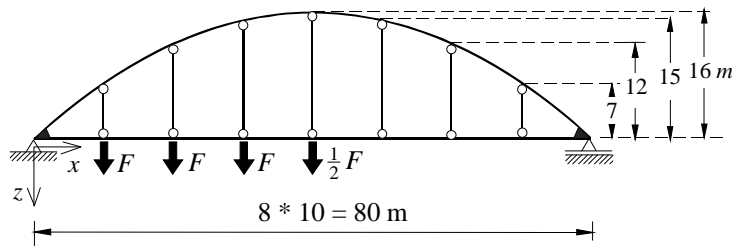
## Totale evenwicht van de constructie per belastingsgeval

BG	Actie FX	React FX	Actie FZ	React FZ	Actie MY	React MY
1	0.000	0.000	210.788	-210.788	-2185.506	2185.506



## Opdracht 5

Staaftoog onder eenzijdige verkeersbelasting.



$$F = 1000 \text{ kN}$$

$$\text{Boog: } E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2, A = 0,240 \text{ m}^2, I = 0,060 \text{ m}^4$$

$$\text{Rijdek: } E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2, A = 0,480 \text{ m}^2, I = 0,120 \text{ m}^4$$

$$\text{Hanger: } E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2, A = 0,024 \text{ m}^2, I = 0,006 \text{ m}^4$$

De berekening is uitgevoerd met het programma FRAME. De oorsprong van het globale assenstelsel valt samen met de linkeroplegging. De  $x$ -as loopt naar rechts, de  $z$ -as naar beneden. Voor de tekenafspraken van  $N$ ,  $M$  en  $V$  wordt verwezen naar de uitwerking van opdracht 1 van hoofdstuk 5.

Frame Studieverisie 04/04/1996 10:40:31 Opdracht 5

```

Krachteenheid      : kN          Lengte-eenheid      : m
Aantal staven      : 23          Aantal veren        : 0
Aantal knopen      : 16          Aantal BG           : 1
Aantal randvwn.    : 2           Aantal BC           : 0
Scheefstand        : 0           Analyse type        : FL+GL
Eigen gewicht van de constructie : 4825.94
  
```

Assen stelsel definitie :

0-----> X+

|

Positieve rotatie RY van Z+ naar X+

v Z+

Knoop coördinaten

Knpnr	X	Z	Knpnr	X	Z
1	0.000	0.000	2	10.000	-7.000
3	10.000	0.000	4	20.000	-12.000
5	20.000	0.000	6	30.000	-15.000
7	30.000	0.000	8	40.000	-16.000
9	40.000	0.000	10	50.000	-15.000
11	50.000	0.000	12	60.000	-12.000
13	60.000	0.000	14	70.000	-7.000
15	70.000	0.000	16	80.000	0.000

Profiel Eigenschappen

Code	A	I	Neta	E	S.G.	R	Prof pos	Mat
AR	4.800E-001	1.200E-001	0.000E+000	2.100E+008	78.5	Y	AR	Staal
AB	2.400E-001	6.000E-002	0.000E+000	2.100E+008	78.5	Y	AB	Staal
AH	2.400E-002	6.000E-003	0.000E+000	2.100E+008	78.5	Y	AH	Staal

Staaftopologie

Stf	Code	I	J	NVM	Lengte	dx/dz	excIx	excIz	excJx	excJz
-----<I>-----<J>-----										
1	AR	1	3	111 111	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
2	AR	3	5	111 111	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
3	AR	5	7	111 111	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
4	AR	7	9	111 111	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
5	AR	9	11	111 111	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
6	AR	11	13	111 111	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
7	AR	13	15	111 111	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
8	AR	15	16	111 111	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
9	AB	1	2	111 111	12.21	-1.43	0.00	0.00	0.00	0.00
10	AB	2	4	111 111	11.18	-2.00	0.00	0.00	0.00	0.00
11	AB	4	6	111 111	10.44	-3.33	0.00	0.00	0.00	0.00
12	AB	6	8	111 111	10.05	-10.00	0.00	0.00	0.00	0.00
13	AB	8	10	111 111	10.05	10.00	0.00	0.00	0.00	0.00
14	AB	10	12	111 111	10.44	3.33	0.00	0.00	0.00	0.00
15	AB	12	14	111 111	11.18	2.00	0.00	0.00	0.00	0.00
16	AB	14	16	111 111	12.21	1.43	0.00	0.00	0.00	0.00
17	AH	2	3	110 110	7.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
18	AH	4	5	110 110	12.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
19	AH	6	7	110 110	15.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
20	AH	8	9	110 110	16.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
21	AH	10	11	110 110	15.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
22	AH	12	13	110 110	12.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
23	AH	14	15	110 110	7.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Randcondities

Knpr	Cond	CX	CZ	CM
-----				
1	110			
16	010			

Knooplasten

(Type : 1=Krachten , 2=Knoopverplaatsingen)

BG : 1 Puntlast F

Knprnr	Type	Richting	Waarde
-----			
3	1	GZ	1000.00
5	1	GZ	1000.00
7	1	GZ	1000.00
9	1	GZ	500.00

Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
-----								
1	1	0.000	0.000000	0.000000	0.003747	2471.909	579.178	-291.873
1	1	10.000	0.000245	0.034224	0.002714	2471.909	579.178	5499.903
2	1	0.000	0.000245	0.034224	0.002714	2471.909	157.879	5499.903
2	1	10.000	0.000490	0.049408	0.000218	2471.909	157.879	7078.697
3	1	0.000	0.000490	0.049408	0.000218	2471.909	-167.828	7078.697
3	1	10.000	0.000736	0.038657	-0.002258	2471.909	-167.828	5400.420
4	1	0.000	0.000736	0.038657	-0.002258	2471.909	-507.569	5400.420
4	1	10.000	0.000981	0.008723	-0.003394	2471.909	-507.569	324.726
5	1	0.000	0.000981	0.008723	-0.003394	2471.909	-511.208	324.726
5	1	10.000	0.001226	-0.022476	-0.002508	2471.909	-511.208	-4787.355
6	1	0.000	0.001226	-0.022476	-0.002508	2471.909	-178.901	-4787.355
6	1	10.000	0.001471	-0.036875	-0.000253	2471.909	-178.901	-6576.367
7	1	0.000	0.001471	-0.036875	-0.000253	2471.909	152.940	-6576.367
7	1	10.000	0.001717	-0.027372	0.002053	2471.909	152.940	-5046.970

8	1	0.000	0.001717	-0.027372	0.002053	2471.909	479.266	-5046.970
8	1	10.000	0.001962	0.000000	0.003105	2471.909	479.266	-254.305
9	1	0.000	0.000000	0.000000	0.003747	-3126.586	156.052	291.873
9	1	12.207	-0.000757	0.040264	0.002542	-3126.586	156.052	2196.732
10	1	0.000	0.005152	0.039940	0.002542	-2811.157	94.958	2196.732
10	1	11.180	0.004528	0.055709	0.000122	-2811.157	94.958	3258.391
11	1	0.000	0.014006	0.054110	0.000122	-2559.559	-70.635	3258.391
11	1	10.440	0.013476	0.042351	-0.002273	-2559.559	-70.635	2520.940
12	1	0.000	0.021302	0.039005	-0.002273	-2460.395	-238.432	2520.940
12	1	10.050	0.020811	0.009264	-0.003328	-2460.395	-238.432	124.725
13	1	0.000	0.022233	0.004960	-0.003328	-2508.278	-240.402	124.725
13	1	10.050	0.021733	-0.025755	-0.002464	-2508.278	-240.402	-2291.285
14	1	0.000	0.016425	-0.029426	-0.002464	-2603.601	-76.172	-2291.285
14	1	10.440	0.015886	-0.044089	-0.000236	-2603.601	-76.172	-3086.545
15	1	0.000	0.008097	-0.046159	-0.000236	-2726.553	74.251	-3086.545
15	1	11.180	0.007492	-0.034856	0.002135	-2726.553	74.251	-2256.396
16	1	0.000	0.002303	-0.035577	0.002135	-2873.371	205.685	-2256.396
16	1	12.207	0.001607	-0.001125	0.003105	-2873.371	205.685	254.305
17	1	0.000	0.033420	-0.022470	0.003175	578.693	0.000	0.000
17	1	7.000	0.034224	-0.000245	0.003175	578.693	0.000	0.000
18	1	0.000	0.047803	-0.028964	0.002373	674.287	0.000	0.000
18	1	12.000	0.049408	-0.000490	0.002373	674.287	0.000	0.000
19	1	0.000	0.036692	-0.025077	0.001623	660.253	0.000	0.000
19	1	15.000	0.038657	-0.000736	0.001623	660.253	0.000	0.000
20	1	0.000	0.007147	-0.021630	0.001291	496.358	0.000	0.000
20	1	16.000	0.008723	-0.000981	0.001291	496.358	0.000	0.000
21	1	0.000	-0.023465	-0.024188	0.001531	332.304	0.000	0.000
21	1	15.000	-0.022476	-0.001226	0.001531	332.304	0.000	0.000
22	1	0.000	-0.037665	-0.027885	0.002201	331.838	0.000	0.000
22	1	12.000	-0.036875	-0.001471	0.002201	331.838	0.000	0.000
23	1	0.000	-0.027825	-0.022289	0.002939	326.322	0.000	0.000
23	1	7.000	-0.027372	-0.001717	0.002939	326.322	0.000	0.000

Knoopverplaatsingen per knoop voor BG

Knpnr	BG	UX	UZ	RY
1	1	0.000000	0.000000	-0.003747
2	1	0.022470	0.033420	-0.002542
3	1	0.000245	0.034224	-0.002714
4	1	0.028964	0.047803	-0.000122
5	1	0.000490	0.049408	-0.000218
6	1	0.025077	0.036692	0.002273
7	1	0.000736	0.038657	0.002258
8	1	0.021630	0.007147	0.003328
9	1	0.000981	0.008723	0.003394
10	1	0.024188	-0.023465	0.002464
11	1	0.001226	-0.022476	0.002508
12	1	0.027885	-0.037665	0.000236
13	1	0.001471	-0.036875	0.000253
14	1	0.022289	-0.027825	-0.002135
15	1	0.001717	-0.027372	-0.002053
16	1	0.001962	0.000000	-0.003105

Reactiekrachten voor BG per knoop

Knpnr	BG	FX	FZ	MY
-----	-----	-----	-----	-----



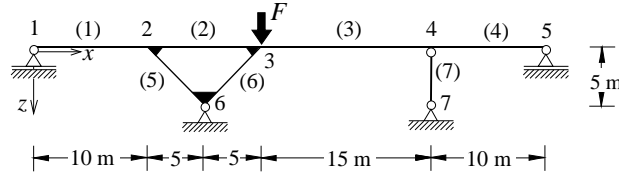
1	1	0.000	-2500.000	0.000
16	1	0.000	-1000.000	0.000

Totale evenwicht van de constructie per belastingsgeval

BG	Actie FX	React FX	Actie FZ	React FZ	Actie MY	React MY
1	0.000	0.000	3500.000	-3500.000	-80000.000	80000.000

**Opdracht 6**

Berekening met een computerprogramma van het getekende viaduct met vork- en pendelonder-steuning voor een lokale last  $F$  van 600 kN.



Rijdek:                 dikte         0,8 m          $F = 600 \text{ kN}$   
                           breedte       6,0 m          $E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$   
 Vork en pendel:     dikte         0,4 m  
                           breedte       0,4 m

Frame Studieverisie 04/04/1996 10:50:53 Opdracht 6

Krachtenheid       : kN            Lengte-eenheid       : m  
 Aantal staven     : 7            Aantal veren         : 0  
 Aantal knopen    : 7            Aantal BG            : 1  
 Aantal randvwn. : 4            Aantal BC            : 0  
 Scheefstand      : 0            Analyse type         : FL+GL  
 Eigen gewicht van de constructie : 5919058224.90

Assen stelsel definitie :  
 0-----> X+  
 |  
 |                 Positieve rotatie RY van Z+ naar X+  
 v Z+

Knoop coördinaten

Kn timer	X	Z	Kn timer	X	Z
1	0.000	0.000	2	10.000	0.000
3	20.000	0.000	4	35.000	0.000
5	45.000	0.000	6	15.000	5.000
7	35.000	5.000			

Geometrische Profielgegevens H=Hoogte, D=Diameter, Tb=dikte flens boven, To=dikte flens onder Bb=Breedte boven, Bo=Breedte onder, Tl=dikte lijf

Prof	Type	H/D	Tb	To	Bb	Bo	Tl
AR	RH-prof	0.8000			6.0000		
AVP	RH-prof	0.4000			4.0000		

Profiel Eigenschappen

Code	A	I	Neta	E	S.G.	R	Prof pos	Mat
AR	4.800E+000	2.560E-001	0.000E+000	3.000E+007	24000000.0	Y	AR	Beton
AVP	1.600E+000	2.133E-002	0.000E+000	3.000E+007	24000000.0	Y	AV	Beton

Staaf topologie

Stf	Code	I	J	NVM	Lengte	dx/dz	excIx	excIz	excJx	excJz
1	AR	1	2	111 111	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
2	AR	2	3	111 111	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
3	AR	3	4	111 111	15.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
4	AR	4	5	111 111	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
5	AVP	2	6	111 111	7.07	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
6	AVP	3	6	111 111	7.07	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7	AVP	4	7	110 110	5.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Randcondities  
 Kn timer   Cond                 CX                 CZ                 CM

```
-----
1  010
5  010
6  110
7  111
```

Knooplasten  
(Type : 1=Krachten , 2=Knoopverplaatsingen)

```
BG :    1  PUNTLAST F
Knpnr  Type  Richting  Waarde
-----
   3    1      GZ      600.00
```

Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
1	1	0.000	0.002372	0.000000	-0.000460	0.000	-106.686	0.000
1	1	10.000	0.002372	-0.002283	0.000235	0.000	-106.686	-1066.857
2	1	0.000	0.002372	-0.002283	0.000235	309.020	189.671	-1004.001
2	1	10.000	0.002393	0.002486	0.000307	309.020	189.671	892.711
3	1	0.000	0.002393	0.002486	0.000307	0.000	-91.637	941.531
3	1	15.000	0.002393	0.000014	-0.000189	0.000	-91.637	-433.020
4	1	0.000	0.002393	0.000014	-0.000189	0.000	43.302	-433.020
4	1	10.000	0.002393	0.000000	0.000093	0.000	43.302	0.000
5	1	0.000	0.000063	-0.003291	0.000235	-428.066	8.954	-62.856
5	1	7.071	0.000000	0.000000	0.000579	-428.066	8.954	0.460
6	1	0.000	0.000065	-0.003450	0.000307	-443.860	6.839	-48.820
6	1	7.071	0.000000	0.000000	0.000579	-443.860	6.839	-0.460
7	1	0.000	0.000014	-0.002393	0.000479	-134.910	0.000	0.000
7	1	5.000	0.000000	0.000000	0.000479	-134.910	0.000	0.000

Knoopverplaatsingen per knoop voor BG

Knpnr	BG	UX	UZ	RY
1	1	0.002372	0.000000	0.000460
2	1	0.002372	-0.002283	-0.000235
3	1	0.002393	0.002486	-0.000307
4	1	0.002393	0.000014	0.000189
5	1	0.002393	0.000000	-0.000093
6	1	0.000000	0.000000	-0.000579
7	1	0.000000	0.000000	0.000000

Reactiekrachten voor BG per knoop

Knpnr	BG	FX	FZ	MY
1	1	0.000	106.686	0.000
5	1	0.000	43.302	0.000
6	1	0.000	-615.049	0.000
7	1	0.000	-134.939	0.000

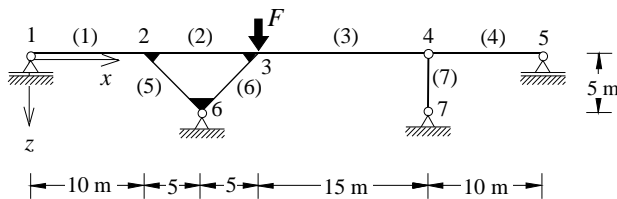
Totale evenwicht van de constructie per belastingsgeval

BG	Actie FX	React FX	Actie FZ	React FZ	Actie MY	React MY
1	0.000	0.000	600.000	-600.000	-12000.000	12000.000



Opgave 7

Herhaling van de berekening van opdracht 6 met een enigszins gewijzigde constructie. Het scharnier bovenaan de verticale pendel zit niet tegen de doorgaande horizontale ligger maar erin. De gegevens van opdracht 6 zijn opnieuw gebruikt.



De berekening is uitgevoerd met het programma FRAME. Van het globale assenstelsel ligt de oorsprong in knoop 1. De x-as is positief naar rechts en de z-as positief naar beneden.

Er doet zich een probleem voor als alle drie staven die aansluiten op knoop 4 daarmee scharnierend worden verbonden. Dan heeft knoop 4 geen stijfheid tegen rotatie en breekt de berekening af. Er zijn twee oplossingen om deze moeilijkheid te verhelpen:

1. Geef in de invoer op dat één van de drie staven in het uiteinde bij knoop 4 momentvast wordt aangesloten. (In de staaftopologie wordt de NVM-code voor deze staaf 111 en voor de andere twee staven 110.) De berekening kan dan worden uitgevoerd, en in de uitvoer wordt een waarde voor  $\varphi_4$  afgedrukt. Dit is dan de eindrotatie van de momentvast aangesloten staaf met NVM-code 111.
2. Laat alle drie staven scharnierend aansluiten aan knoop 4. (In de staaftopologie wordt voor alle drie staven bij knoop 4 de NVM-code 110 gebruikt.) Geef de rotatie  $\varphi_4$  een voorgeschreven waarde. Elke waarde is goed; voor de hand liggend is de waarde nul. De berekening kan nu worden uitgevoerd en de voorgeschreven waarde verschijnt in de uitvoer. Deze heeft nu geen fysische betekenis.

Frame Studieverisie 04/04/1996 11:30:12 Opdracht 7

```

Krachteenheid      : kN          Lengte-eenheid      : m
Aantal staven      : 7           Aantal veren       : 0
Aantal knopen      : 7           Aantal BG          : 1
Aantal randvwn.    : 5           Aantal BC          : 0
Scheefstand        : 0           Analyse type       : FL+GL
Eigen gewicht van de constructie : 5919058224.90
    
```

```

Assen stelsel definitie :
0-----> X+
|
|          Positieve rotatie RY van Z+ naar X+
v Z+
    
```

Knoop coördinaten					
Knpnr	X	Z	Knpnr	X	Z
1	0.000	0.000	2	10.000	0.000
3	20.000	0.000	4	35.000	0.000
5	45.000	0.000	6	15.000	5.000
7	35.000	5.000			

## Geometrische Profielgegevens

H=Hoogte, D=Diameter, Tb=dikte flens boven, To=dikte flens onder

Bb=Breedte boven, Bo=Breedte onder, Tl=dikte lijf

Prof	Type	H/D	Tb	To	Bb	Bo	Tl
AR	RH-prof	0.8000			6.0000		
AV	RH-prof	0.4000			4.0000		

## Profiel Eigenschappen

Code	A	I	Neta	E	S.G.	R	Prof	pos	Mat
AR	4.800E+000	2.560E-001	0.000E+000	3.000E+007	24000000.0	Y	AR		Beton
AVP	1.600E+000	2.133E-002	0.000E+000	3.000E+007	24000000.0	Y	AV		Beton

## Staaftopologie

Stf	Code	I	J	NVM	Lengte	dx/dz	excIx	excIz	excJx	excJz
				<I>-<J>						
1	AR	1	2	111 111	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
2	AR	2	3	111 111	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
3	AR	3	4	111 110	15.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
4	AR	4	5	110 111	10.00	999.99	0.00	0.00	0.00	0.00
5	AVP	2	6	111 111	7.07	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
6	AVP	3	6	111 111	7.07	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7	AVP	4	7	110 110	5.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

## Randcondities

Knpr	Cond	CX	CZ	CM
1	010			
4	001			
5	010			
6	110			
7	111			

## Knooplasten

(Type : 1=Krachten , 2=Knoopverplaatsingen)

BG : 1 PUNTLAST F

Knpr	Type	Richting	Waarde
3	1	GZ	600.00

## Snedegrootheden per staaf voor Belastinggevallen (balk notatie)

Stf	BG	Afstand	UX	UZ	RY	N	V	M
1	1	0.000	0.002713	0.000000	-0.000520	0.000	-118.828	0.000
1	1	10.000	0.002713	-0.002617	0.000254	0.000	-118.828	-1188.277
2	1	0.000	0.002713	-0.002617	0.000254	334.593	198.461	-1108.933
2	1	10.000	0.002736	0.002836	0.000406	334.593	198.461	875.681
3	1	0.000	0.002736	0.002836	0.000406	0.000	-60.878	913.172
3	1	15.000	0.002736	0.000006	-0.000486	0.000	-60.878	0.000
4	1	0.000	0.002736	0.000006	-0.000001	0.000	0.000	0.000
4	1	10.000	0.002736	0.000000	-0.000001	0.000	0.000	0.000
5	1	0.000	0.000068	-0.003769	0.000254	-460.950	12.236	-79.344
5	1	7.071	0.000000	0.000000	0.000653	-460.950	12.236	7.174
6	1	0.000	0.000070	-0.003940	0.000406	-477.475	4.290	-37.507
6	1	7.071	0.000000	0.000000	0.000653	-477.475	4.290	-7.174
7	1	0.000	0.000006	-0.002736	0.000547	-60.866	0.000	0.000
7	1	5.000	0.000000	0.000000	0.000547	-60.866	0.000	0.000

Knoopverplaatsingen per knoop voor BG

Knppnr	BG	UX	UZ	RY
1	1	0.002713	0.000000	0.000520
2	1	0.002713	-0.002617	-0.000254
3	1	0.002736	0.002836	-0.000406
4	1	0.002736	0.000006	0.000000
5	1	0.002736	0.000000	0.000001
6	1	0.000000	0.000000	-0.000653
7	1	0.000000	0.000000	0.000000

Reactiekrachten voor BG per knoop

Knppnr	BG	FX	FZ	MY
1	1	0.000	118.828	0.000
4	1	0.000	0.000	0.000
5	1	0.000	0.000	0.000
6	1	0.000	-657.948	0.000
7	1	0.000	-60.879	0.000

Totale evenwicht van de constructie per belastingsgeval

BG	Actie FX	React FX	Actie FZ	React FZ	Actie MY	React MY
1	0.000	0.000	600.000	-600.000	-12000.000	2000.000